МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья
УДК 517.95+519.21
ББК 22.161.62+22.171.5
Ш 96
DOI: 10.53598/2410-3225-2022-2-301-11-38

Об устойчивости в целом по вероятности решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, возмущенных белым шумом. III*

(*Рецензирована*)

Магомет Мишаустович Шумафов[1], Тимур Аскербиевич Панеш[2], Мухаммед Ареф Хаваджа[3]

[1, 2, 3] *Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия*
[1] *magomet_shumaf@mail.ru*
[2] *tpanesh@yandex.ru*
[3] *nblm600@gmail.com*

Аннотация. *Настоящая статья является продолжением предыдущей статьи и представляет собой третью часть работы авторов. В работе рассматриваются нелинейные автономные дифференциальные уравнения второго порядка, возмущенные белым шумом. В первых частях работы приводятся предварительные сведения из теории вероятностей, теории случайных процессов и теории устойчивости стохастических дифференциальных уравнений. Здесь, в третьей части, даются определения стохастических дифференциалов Ито и Стратоновича, стохастического дифференциального уравнения в форме Ито и в форме Стратоновича, решения стохастического дифференциального уравнения, сформулирована теорема существования и единственности решения, приводятся формула Ито дифференцирования сложной функции для стохастических дифференциалов и стохастический аналог формулы Ньютона-Лейбница. В работе получены достаточные условия асимптотической устойчивости в целом по вероятности решений нелинейных стохастических уравнений второго порядка. Даны вероятностные оценки пребывания случайной траектории в ограниченной области фазовой плоскости. В качестве примера рассматривается гармонический осциллятор, возмущенный белым шумом.*

Ключевые слова: *случайный процесс, винеровский процесс, стохастическое дифференциальное уравнение Ито, стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича, теорема существования и единственности решения, формула Ито, асимптотическая устойчивость в целом по вероятности, функция Ляпунова, гармонический осциллятор*

Original Research Paper

On the stochastic stability in the large of solutions of the nonlinear second-order differential equations perturbed by white noise. III

Magomet M. Shumafov[1], Timur A. Panesh[2], Muhammed A. Havadja[3]

[1, 2, 3] *Adyghe State University, Maikop, Russia*
[1] *magomet_shumaf@mail.ru*
[2] *tpanesh@yandex.ru*
[3] *nblm600@gmail.com*

Abstract. *This paper is a continuation of the previous paper and presents the third part of the authors' work. In the work nonlinear autonomous second-order differential equations with random right-hand sides of the type of white noise are considered. In the first parts of the work we present*

* *Продолжение*. №№ 4 (291) 2021 [1], 1 (296) 2022 [2].

some mathematical preliminaries from probability theory, stochastic processes and stability of stochastic differential equations. Here, in the third part, we give definitions of stochastic differentials by Ito and Stratonovich, stochastic differential equations in the form of Ito and in the form of Stratonovich, solution of stochastic differential equation, the existence and uniqueness theorem is formulated, Ito's formula for differentiation of composite function is given, stochastic analog of classical Newton-Leibnitz formula is presented. In the work sufficient conditions for stochastic asymptotic stability in the large of solutions of the nonlinear second-order Ito's stochastic differential equations are obtained. The probabilistic estimations of the remaining of a random trajectory in a bounded region of the phase plane are given. As an example harmonic oscillator perturbed by white noise random process is considered.

Keywords: *stochastic process, Wiener process, Ito's stochastic differential equation, Stratonovich's stochastic differential equation, existence and uniqueness theorem, Ito' formula, stochastic asymptotic stability in the large, Lyapunov function, harmonic oscillator*

Настоящая статья является продолжением предыдущих статей [1, 2]. В [1] для удобства читателя были приведены предварительные сведения из стохастического анализа, а в [2] приведены полные конструкции стохастических интегралов Ито и Стратоновича, на основе которых в настоящей статье дается определение решения соответствующих стохастических дифференциальных уравнений. Здесь в статье мы даем сначала определения стохастических дифференциалов Ито и Стратоновича и соответственно стохастических дифференциальных уравнений. Затем дается определение решения стохастического дифференциального уравнения и формулируется теорема существования и единственности решения. Приводятся формула Ито дифференцирования сложной функции для стохастических дифференциалов и стохастический аналог классической формулы Ньютона-Лейбница. В работе получены достаточные условия асимптотической устойчивости в целом по вероятности решений нелинейных стохастических уравнений второго порядка. Даны вероятностные оценки пребывания случайной траектории в ограниченной области фазовой плоскости. В качестве примера рассматривается стохастический гармонический осциллятор.

Полное изложение теории стохастических дифференциальных уравнений и их приложений можно найти в книгах [3–9]. Ниже во всей работе мы сохраняем общую нумерацию пунктов и продолжаем ее.

2.4. Стохастические дифференциалы

Здесь мы введем понятие стохастического дифференциала в форме Ито и в форме Стратоновича и приведем формулу Ито дифференцирования сложной функции для стохастических дифференциалов.

2.4.1. Определение стохастического дифференциала Ито

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задано возрастающее семейство σ-алгебр (поток) $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}$, то есть $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ для всех $0 \le s < t < \infty$. Пусть $w(t) = w(t, \omega)$, $t \ge 0$, – одномерный винеровский процесс, согласованный с семейством $\{\mathcal{F}_t\}$, то есть при каждом $t \in [0, +\infty)$ случайная величина $w(t, \omega)$ измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_t$. Предположим, что приращения $w(t+h) - w(t)$, $h > 0$, процесса $w(t)$ после момента t не зависят от σ-алгебры $\mathcal{F}_t$. Точнее, предполагается, что для процесса $w(t)$ выполняется марковское свойство относительно семейства $\{\mathcal{F}_t\}$: «будущее» винеровского процесса $w(t)$ после момента времени t – σ-алгебра событий $w^+(t) := \sigma(w(t+h) - w(t), h > 0)$ – не зависит от σ-алгебры событий $\mathcal{F}_t$ до момента t включительно; при этом $\mathcal{F}_t \supseteq w^-(t)$, где σ-алгебра событий $w^-(t) := \sigma(w(s), 0 \le s \le t)$ есть «прошлое» винеровского процесса. В этом случае также говорят, что винеровский процесс $w(t)$ есть *неупреждающий* процесс относительно семейства $\{\mathcal{F}_t\}$ σ-алгебр $\mathcal{F}_t$ (или семейство $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ неупреждающее по отношению к винеровскому процессу $w(t)$).

Пусть $x(t,\omega)$, $t\in[a,b]$, $\omega\in\Omega$, – вещественнозначная случайная функция (случайный процесс), измеримая по (t,ω) относительно σ-алгебры $\mathcal{B}\times\mathcal{F}$, где $\mathcal{B}$ – множество всех борелевских подмножеств отрезка $[a,b]$ (вместо этого условия достаточно предположить прогрессивную измеримость относительно семейства $\{\mathcal{F}_t\}$ случайной функции $x(t,\omega)$: для любого $t\in[a,b]$ функция $x(s,\omega)$, $a\leq s\leq t$, $\omega\in\Omega$, измерима по (s,ω) относительно σ-алгебры $\mathcal{B}([a,t])\times\mathcal{F}_t$, где $\mathcal{B}([a,t])$ – множество всех борелевских подмножеств отрезка $[a,t]$). Далее, пусть функция $x(t,\omega)$, $t\in[a,b]$, при каждом $t\in[a,b]$ есть $\mathcal{F}_t$-измеримая случайная величина (то есть $x(t,\omega)$, $t\in[a,b]$, – неупреждающая случайная функция относительно потока $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$).

Предположим, что указанная выше случайная функция $x(t,\omega)$ имеет при почти всех $\omega\in\Omega$ непрерывные реализации $t\to x(t,\omega)$, $t\in[a,b]$ (то есть почти все траектории процесса $x(t,\omega)$, $t\in[a,b]$, непрерывны).

Тогда если для процесса $x(t,\omega)$, $t\in[a,b]$, существуют случайные функции $a(t,\omega)$ и $f(t,\omega)$, $t\in[a,b]$, такие, что:

a) $a(t,\omega)$ и $f(t,\omega)$ измеримы по совокупности переменных (t,ω), $t\in[a,b]$, $\omega\in\Omega$;

b) $a(t,\omega)$ и $f(t,\omega)$ – $\mathcal{F}_t$-измеримы для всех $t\in[a,b]$ (то есть $a(t,\omega)$ и $f(t,\omega)$ – неупреждающие случайные функции);

c) при почти всех ω существует конечный интеграл

$$\int_a^b |a(t,\omega)|dt, \quad \text{то есть} \quad \mathrm{P}\left\{\omega\in\Omega : \int_a^b |a(t,\omega)|dt<\infty\right\}=1;$$

d) $\mathrm{M}\int_a^b f(t,\omega)^2\,dt<\infty$ (или $\int_a^b \mathrm{M}f(t,\omega)^2\,dt<\infty$)

(условие d) можно заменить на более слабое условие: $\int_a^b f(t,\omega)^2\,dt<\infty$ для почти всех ω, то есть $\mathrm{P}\left\{\omega\in\Omega : \int_a^b f(t,\omega)^2\,dt<\infty\right\}=1$);

e) при почти всех $\omega\in\Omega$ (почти наверное) выполняется равенство

$$x(t,\omega)=x(s,\omega)+\int_s^t a(\tau,\omega)\,d\tau+\int_s^t f(\tau,\omega)\,dw(\tau) \quad \text{для всех} \quad a\leq s<t\leq b,$$

то говорят, что случайный процесс $x(t)=x(t,\omega)$ имеет стохастический дифференциал в смысле Ито $dx(t)$ и пишут ([7 с. 89; 10, с. 460; 11, с. 230]):

$$dx(t)=a(t,\omega)\,dt+f(t,\omega)\,dw(t) \quad \text{или} \quad dx(t)=a(t)\,dt+f(t)\,dw(t).$$

Процесс $x(t,\omega)$, удовлетворяющий условию e), называется процессом Ито.

Следует особо отметить, что последние два *равенства в дифференциалах* – это просто *сокращенная символическая запись* интегрального равенства в условии e); строго говоря, символы "$dx(t)$", "dt" и "$dw(t)$" сами по себе не имеют никакого смысла.

Например, на языке стохастических дифференциалов интегральное равенство (см. п. 2.3.4) $\int_0^t w(s)\,dw(s) = \frac{w(t)^2}{2} - \frac{t}{2}$ записывается символически в дифференциалах так: $dw(t)^2 = dt + 2w(t)\,dw(t)$.

Теперь перейдем к многомерному случаю ([7, с. 89; 11, с. 230]). Пусть дан m-мерный винеровский процесс $w(t) = \left(w_1(t), \dots, w_m(t)\right)^{\mathrm{T}}_{t\geq 0}$ и согласованное с ним возрастающее семейство $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ σ-алгебр $\mathcal{F}_t$: $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ для всех $0 \leq s < t < \infty$ и винеровские процессы $w_1(t), \dots, w_m(t)$ независимы между собой и $\mathcal{F}_t$-измеримы. Предположим, что случайные величины $w_i(t+h) - w_i(t), i = 1, \dots, m,$ при любом $t \geq 0$ в совокупности не зависят от σ-алгебры $\mathcal{F}_t$ при каждом $h > 0,$ или σ-алгебра $\mathcal{F}_t$ не зависит от σ-алгебры $\mathcal{F}_{w(h),\, h\geq t} = \sigma\left\{ w(t+h) - w(t),\ h > 0 \right\}$, порожденной случайным процессом $w(t+h) - w(t)$, $h > 0$.

Определим, что значит, что n-мерный случайный процесс $x(t,\omega) = x(t) = \left(x_1(t), \dots, x_n(t)\right)^{\mathrm{T}}$, почти все траектории которого непрерывны, имеет стохастический дифференциал $dx(t) = a(t, \omega)\,dt + f(t, \omega)\,dw(t)$, где $a(t,\omega) = \left(a_1(t,\omega), \dots, a_n(t,\omega)\right)^{\mathrm{T}}$ – векторная случайная функция, а $f(t,\omega) = \left(f_{jr}(t,\omega)\right)$ $\left(j = 1, \dots, n;\, r = 1, \dots, m\right)$ – матричная функция.

Предположим, что $a(t,\omega)$ и $f(t,\omega)$ измеримы по (t,ω), $t \in [a,b]$, $\omega \in \Omega$, и $\mathcal{F}_t$-измеримы для всех $t \in [a,b]$ ($a_j(t,\omega)$ и $f_{jr}(t,\omega)$ удовлетворяют приведенным выше условиям a) и b)). Далее, допустим, что при почти всех $\omega \in \Omega$

$$\mathrm{M}\int_a^b \left\|a(t,\omega)\right\| dt < \infty \quad \text{и} \quad \mathrm{M}\int_a^b \left\|f(t,\omega)\right\|^2 dt < \infty .$$

Здесь $\|a\|$ и $\|f\|$ – евклидовы нормы соответственно вектора $a(t,\omega) \in \mathbb{R}^n$ и матрицы $f(t,\omega) \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Указанные интегральные условия можно заменить на более слабые: $\int_a^t \left\|a(t,\omega)\right\| dt < \infty$, $\int_a^t \left\|f(t,\omega)\right\|^2 dt < \infty$ для почти всех ω для каждого $t \in [a,b]$.

Тогда *по определению* полагают, что n-мерный случайный процесс $x(t,\omega)$, $t \in [a,b]$, имеет стохастический дифференциал $dx(t) = a(t, \omega)\,dt + f(t, \omega)\,dw(t)$, если при почти всех $\omega \in \Omega$ выполняется (векторное) интегральное равенство:

$$x(t) = x(s) + \int_s^t a(\tau, \omega)\,d\tau + \int_s^t f(\tau, \omega)\,dw(\tau) \quad \text{для всех} \quad a \leq s < t \leq b .$$

Последнее равенство записывается в координатной форме, с учетом определения интегралов от векторной и матричной функций (см. п. 2.3.3), следующим образом:

$$x_i(t) = x_i(s) + \int_s^t a_i(\tau, \omega)\,d\tau + \sum_{r=1}^{m} \int_a^b f_{ir}(\tau, \omega)\,dw_r(\tau) \quad \left(i = 1, \dots, n\right).$$

Соответствующее равенство в дифференциалах имеет вид:

$$dx_i(t) = a_i(t, \omega)\,dt + \sum_{r=1}^{m} f_{ir}(t, \omega)\, w_r(t) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Последнее равенство – это сокращенная запись в координатной форме предыдущего интегрального равенства. Как и в одномерном случае, процесс $x(t) = x(t, \omega) = (x_1(t, \omega), \dots, x_n(t, \omega))^{\mathrm{T}}$, удовлетворяющий выписанному выше интегральному равенству, называется n-мерным процессом Ито.

Замечание 1. Можно также определить стохастический дифференциал в смысле Стратоновича. По аналогии с определением стохастического дифференциала Ито стохастическим дифференциалом $d^* x(t)$ в смысле Стратоновича случайного процесса $x(t) = x(t, \omega) = (x_1(t, \omega), \dots, x_n(t, \omega))^{\mathrm{T}}$, $t \in [a, b]$, $\mathcal{F}_t$-измеримого при каждом t, можно назвать выражение

$$a(t, \omega)\,dt + f(t, \omega) \circ dw(t),$$

где функции $a(t, \omega) = (a_1(t, \omega), \dots, a_n(t, \omega))^{\mathrm{T}}$, $f(t, \omega) = (f_{jr}(t, \omega))$ $(j = 1, \dots, n; r = 1, \dots, m)$, $w(t) = w(t, \omega) = (w_1(t, \omega), \dots, w_m(t, \omega))$, $\mathcal{F}_t$-измеримы при каждом $t \in [a, b]$, $a(t) = a(t, \omega)$ принадлежит при почти всех ω классу $\mathcal{L}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ (абсолютно интегрируемых функций), если при почти всех ω выполняется интегральное равенство

$$x(t) = x(s) + \int_s^t a(\tau, \omega)\,d\tau + \int_s^t f(\tau, \omega) \circ dw(\tau)$$

для всех $a \le s < t \le b$ (при условии, что существует стохастический интеграл Стратоновича $\int_s^t f(\tau, \omega) \circ dw(\tau)$).

2.4.2. Формула Ито

Формула Ито устанавливает правило дифференцирования сложной функции для стохастических дифференциалов.

А. Пусть вещественнозначный случайный процесс $\xi(t) = \xi(t, \omega)$, $t \in [a, b]$, имеет стохастический дифференциал в смысле Ито:

$$d\xi(t) = a(t, \omega)\,dt + f(t, \omega)\,dw(t),$$

где $a(t) = a(t, \omega)$ и $f(t) = f(t, \omega)$ – вещественнозначные случайные функции, удовлетворяющие условиям a)–c) в определении стохастического дифференциала (см. выше).

Утверждение 1 ([7, с. 92; 9, с. 69; 10, с. 460])**.** Пусть $\mathrm{F}(t, x)$ – вещественнозначная неслучайная функция, определенная для $t \in [a, b]$, $x \in \mathbb{R}$ и $\mathrm{F} \in \mathrm{C}^{1,2}([a, b] \times \mathbb{R})$ (то есть F имеет непрерывные частные производные до первого порядка по t и до второго порядка по x включительно). Тогда случайный процесс $\eta(t, \omega) = \mathrm{F}(t, \xi(t, \omega))$, $t \in [a, b]$, также имеет стохастический дифференциал Ито:

$$d\eta(t) = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}(t, \xi(t))\,dt + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}(t, \xi(t))\,d\xi(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2}(t, \xi(t))\, f(t)^2\,dt =$$

$$= \left[\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}(t, \xi(t)) + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}(t, \xi(t))\, a(t, \omega) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2}(t, \xi(t))\, f(t, \omega)^2\right] dt + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}(t, \xi(t))\, f(t, \omega)\,dw(t).$$

Последнюю формулу для $d\eta(t) = d\mathrm{F}(t, \xi(t, \omega))$ называют *одномерной формулой*

Ито, ([5, с. 65; 6, с. 32]). Эту формулу иногда записывают символически в более удобном для запоминания виде:

$$dF(t,\xi(t)) = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial x}d\xi(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{dx^2}(d\xi(t))^2,$$

где $(d\xi(t))^2 = (d\xi(t))\cdot(d\xi(t))$ вычисляется по правилам $dt\cdot dt = dt\cdot dw(t) = dw(t)\cdot dt = 0$, $dw(t)\cdot dw(t) = dt$.

Пример 1. Пусть $\xi(t,\omega) = w(t,\omega)$ ($w(t) = w(t,\omega)$ – винеровский процесс). Найдем $d\left(w(t)\right)^n$.

Имеем $d\xi(t) = dw(t)$ и, следовательно, $a(t,\omega)\equiv 0$, $f(t,\omega)\equiv 1$. Выберем $F(t,x)\equiv x^n$. Используя формулу Ито, получаем:

$$d\left(w(t)^n\right) = nw(t)^{n-1}\cdot dw(t) + \frac{1}{2}n(n-1)w(t)^{n-2}\cdot(dw(t))^2 = nw(t)^{n-1}\cdot dw(t) + \frac{1}{2}n(n-1)w(t)^{n-2}\,dt.$$

В частности, при $n = 2$ имеем:

$$d\left(w(t)^2\right) = 2w(t)dw(t) + dt.$$

Отметим, что смысл последнего дифференциального равенства заключается в том, что имеет место интегральное соотношение (ср. п. 2.4.1):

$$\int_s^t w(t)dw(t) = \frac{w(t)^2 - w(s)^2}{2} - \frac{t-s}{2}.$$

B. Теперь приведем *многомерную формулу Ито*. Начнем с частного случая, когда $w(t) = w(t,\omega)$ – одномерный винеровский процесс, а $\xi(t) = \xi(t,\omega) = (\xi_1(t,\omega),\dots,\xi_n(t,\omega))^{\mathrm{T}}$, $a(t) = a(t,\omega) = (a_1(t,\omega),\dots,a_n(t,\omega))^{\mathrm{T}}$, $f(t) = f(t,\omega) = (f_1(t,\omega),\dots,f_n(t,\omega))^{\mathrm{T}}$, $a\le t\le b$, – n-мерные векторные случайные функции.

Предположим, что каждый из процессов $a_i(t,\omega)$ и $f_i(t,\omega)$ $(i=1,\dots,n)$ удовлетворяет условиям a)–d) в определении стохастического дифференциала для числовой случайной функции. Тогда числовые случайные функции $\xi_j(t,\omega)$ $(j=1,\dots,n)$ имеют стохастические дифференциалы Ито:

$$\begin{cases} d\xi_1(t) = & a_1(t,\omega)dt + & f_1(t,\omega)dw(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d\xi_n(t) = & a_n(t,\omega)dt + & f_n(t,\omega)dw(t) \end{cases}$$

или в векторной записи

$$d\xi(t) = a(t,\omega)dt + f(t,\omega)dw(t),$$

где $d\xi(t) := (d\xi_1(t),\dots,d\xi_n(t))^{\mathrm{T}}$.

Утверждение 2 ([7, с. 91; 9, с. 76]). Пусть $F(t,x)$ – вещественнозначная неслучайная функция от $t\in[a,b]$ и $x = (x_1,\dots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$ с непрерывными частными производными $\frac{\partial F}{\partial t}$, $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_j}$ $(i,j=1,\dots,n)$. Тогда процесс $\eta(t) = F(t,\xi(t,\omega)) = F(t,\xi_1(t,\omega),\dots,\xi_n(t,\omega))$ также имеет стохастический дифференциал Ито:

$$d\eta(t)=\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}(t,\xi(t))dt+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i}(t,\xi(t))d\xi_i(t)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_i \partial x_j}(t,\xi(t))\cdot f_i(t,\omega)\cdot f_j(t,\omega)dt$$

или в векторно-матричной записи

$$d\eta(t)=\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}dt+\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x},d\xi(t)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2}\cdot f(t),f(t)\right)dt=\left[\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}+\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x},a(t)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2}f(t),f(t)\right)\right]dt+$$

$$+\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x},f(t)\right)dw(t),$$

где производные

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t},\quad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}=\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_n}\right)^{\mathrm{T}}\quad \text{и}\quad \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{dx^2}=\left(\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n}$$

берутся в точке $(t,\xi(t))$; $(*,*)$ – скалярное произведение соответствующих векторов. (Здесь $\partial \mathrm{F}/\partial x$ – градиент, а $\partial^2 \mathrm{F}/\partial x^2$ – матрица Гесса функции F по x.)

Последняя формула для $d\eta(t)$ носит название *обобщенной одномерной формулы Ито*.

Как и выше, формулу для $d\eta(t)$ можно символически записать в более удобном для запоминания виде:

$$d\mathrm{F}(t,\xi(t))=\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}dt+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i}\cdot d\xi_i(t)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_i \partial x_j}\cdot d\xi_i(t)\cdot d\xi_j(t),$$

или в векторно-матричной записи

$$d\mathrm{F}(t,\xi(t))=\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}dt+\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x},d\xi(t)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2}d\xi(t),d\xi(t)\right),$$

где произведение $d\xi_i(t)\cdot d\xi_j(t)$ вычисляется по формальным правилам умножениям:

$$dt\cdot dt=0,\quad dt\cdot dw=dw(t)\cdot dt=0,\quad dw(t)\cdot dw(t)=dt.$$

Согласно этим правилам,

$$d\xi_i(t)\cdot d\xi_j(t)=f_i(t,\omega)\cdot f_j(t,\omega)dt.$$

Последнюю формулу для $d\mathrm{F}(t,\xi(t))$ можно записать еще короче:

$$d\mathrm{F}(t,\xi(t))=\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}dt+\left(d\xi,\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathrm{F}+\frac{1}{2}\left(d\xi,\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\mathrm{F},$$

где $\left(d\xi,\frac{\partial}{\partial x}\right)=d\xi_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\dots+d\xi_n\frac{\partial}{\partial x_n},\quad \frac{\partial}{\partial x}:=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right).$

Пример 2 (правило Ито вычисления дифференциала произведения)**.** Пусть

$$d\xi_1(t)=a_1(t,\omega)dt+f_1(t,\omega)dw,$$

$$d\xi_2(t)=a_2(t,\omega)dt+f_2(t,\omega)dw,$$

где $a_i(t)=a_i(t,\omega)$ и $f_i(t)=f_i(t,\omega)$ $(i=1,2)$ удовлетворяют условиям определения стохастического дифференциала (см. начало п. 2.4). Тогда, выбирая $\mathrm{F}(t,x_1,x_2)=x_1x_2$, имеем по формуле Ито:

$$d(\xi_1(t)\xi_2(t))=\xi_2(t)d\xi_1(t)+\xi_1(t)d\xi_2(t)+f_1(t)f_2(t)dt=$$

$$=\left[\xi_2(t)a_1(t)+\xi_1(t)a_2(t)+f_1(t)f_2(t)\right]dt+\left[\xi_2(t)f_1(t)+\xi_1(t)f_2(t)\right]dw(t).$$

Коротко:

$$d\left(\xi_1\xi_2\right) = \left(\xi_1 a_2 + \xi_2 a_1 + f_1 f_2\right)dt + \left(\xi_1 f_2 + \xi_2 f_1\right)dw.$$

В частности, полагая $\xi_1(t) \equiv c\ (= \text{const})$, $\xi_2(t) := \xi(t)$, получаем $d\big(c\xi(t)\big) = cd\xi(t)$, поскольку $dc = 0$ (то есть $a_1(t) \equiv 0$, $f_1(t) \equiv 0$).

Теперь обратимся к более общему случаю, когда $w(t) = w(t,\ \omega) = \left(w_1(t),\ \ldots,\ w_m(t)\right)$ – m-мерный винеровский процесс $(m \geq 1)$, $a(t) = a(t,\omega) = \left(a_1(t,\omega),\ldots,a_n(t,\omega)\right)^{\mathrm{T}}$ – n-мерная векторная и $f(t) = f(t,\omega) = \left(f_{ir}(t,\omega)\right)$ – $(n\times m)$-матричная случайные функции $(i = 1,\ldots,n; r = 1,\ldots,m)$.

Предположим, что каждый из процессов $a_i(t,\omega)$, $f_{ir}(t,\omega)$ $(i = 1,\ldots,n; r = 1,\ldots,m)$ удовлетворяет условиям a)–e) п. 2.4.1. Тогда по определению случайные функции $\xi_i(t) = \xi_i(t,\omega)$ имеют стохастические дифференциалы Ито:

$$\begin{cases} d\xi_1(t) = & a_1(t,\ \omega)\,dt + \quad f_{11}(t,\ \omega)\,dw_1(t) + \ldots + f_{1m}(t,\ \omega)\,dw_m(t), \\ \quad\vdots & \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ d\xi_n(t) = & a_n(t,\ \omega)\,dt + \quad f_{n1}(t,\ \omega)\,dw_1(t) + \ldots + f_{nm}(t,\ \omega)\,dw_m(t), \end{cases}$$

или в векторно-матричной записи

$$d\xi(t) = a(t,\ \omega)\,dt + f(t,\ \omega)\,dw(t) = a(t,\ \omega)\,dt + \sum_{r=1}^{m} f_r(t,\ \omega)\,w_r(t),$$

где $d\xi(t) := \left(d\xi_1(t),\ldots,d\xi_n(t)\right)^{\mathrm{T}}$, $f_r(t,\omega) = \left(f_{1r}(t,\omega),\ldots,f_{nr}(t,\omega)\right)$ – r-й вектор-столбец матрицы $f(t,\omega)$. Процесс $\xi(t)$, определяемый последним стохастическим дифференциалом:

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_s^t a(\tau,\ \omega)\,d\tau + \sum_{r=1}^{m}\int_s^t f_r(\tau,\ \omega)\,dw_r(\tau)$$

называется n-мерным процессом Ито.

Утверждение 3 ([5, с. 71; 6, с. 36; 7, с. 91; 9, с. 78; 10, с. 465; 11, с. 231])**.** Пусть, как и выше, $\mathrm{F}(t,x) = \mathrm{F}(t,x_1,\ldots,x_n)$ – вещественнозначная неслучайная функция от $t \in [a,b]$, $x = (x_1,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ с непрерывными частными производными $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}$, $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_i \partial x_j}$ $(i,\ j = 1,\ldots,n)$. Тогда процесс $\eta(t) = \mathrm{F}\big(t,\xi(t)\big) = \mathrm{F}\big(t,\xi_1(t),\ldots,\xi_n(t)\big)$ также имеет стохастический дифференциал Ито:

$$d\eta(t) = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}\big(t,\xi(t)\big)dt + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i}\big(t,\xi(t)\big)d\xi_i(t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_i \partial x_j}\big(t,\xi(t)\big)\varphi_{ij}\big(t,\xi(t)\big)dt,$$

где $\varphi_{ij}\big(t,\xi(t)\big) = \sum\limits_{r=1}^{m} f_{ir}\big(t,\xi(t)\big)\cdot f_{jr}\big(t,\xi(t)\big)$.

Нетрудно видеть, что $\varphi_{ij}(t,\omega)\ (i,\ j = 1,\ldots,n)$ – это элементы $n\times n$-матрицы $f(t,\omega)\cdot f(t,\omega)^{\mathrm{T}}$ (φ_{ij} есть скалярное произведение i-й вектор-строки и j-й вектор-строки матрицы $f(t,\omega)$). С учетом последнего формулу для $d\eta(t)$ можно переписать в следующем виде:

$$d\eta(t) = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}dt + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}, d\xi(t)\right) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_i \partial x_j}\cdot\left(f(t,\omega)\cdot f(t,\omega)^{\mathrm{T}}\right)_{ij}dt =$$

$$=\left[\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}+\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}, a(t)\right)+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_i \partial x_j} f_{ir}(t)\cdot f_{jr}(t)\right]dt+\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}, f_r(t)\right)w_r(t),$$

или символически

$$d\mathrm{F}(t, \xi(t))=\left[\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}+\left(a(t), \frac{\partial}{\partial x}\right)\mathrm{F}+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\left(f_r(t), \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \mathrm{F}\right]dt+\sum_{r=1}^{m}\left(f_r(t), \frac{\partial}{\partial x}\right)\mathrm{F}dw_r(t),$$

где числовая функция $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}$, вектор-функция $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}$ и матрица-функция $\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_i \partial x_j}$ берутся в точке $(t, \xi(t))$, $f_r(t)$ – r-й столбец матрицы $f(t, \omega)$; $(*, *)$ – скалярное произведение векторов.

Последняя формула (или ей предшествующая) для дифференциала $d\eta(t)=d\mathrm{F}(t, \xi(t))$ называется *многомерной формулой Ито* $(m>1)$.

Если ввести формальные правила умножения $dt\cdot dt=0$, $dt\cdot dw_r(t)=dw_r(t)\cdot dt=0$, $dw_r(t)\cdot dw_r(t)=dt$, $dw_r(t)\times dw_q(t)=0\ (r\neq q)$, то $\varphi_{ij}(t, \xi(t))dt=d\xi_i(t)\cdot d\xi_j(t)$ и, стало быть, формулу для стохастического дифференциала $d\eta(t)=d\mathrm{F}(t, \xi(t))$ можно переписать, как и выше, в более компактном виде:

$$d\mathrm{F}(t, \xi(t))=\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}(t, \xi(t))dt+\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}(t, \xi(t)), d\xi(t)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2}(t, \xi(t))d\xi(t), d\xi(t)\right),$$

где

$$\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}(t, \xi(t)), d\xi(t)\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i}(t, \xi(t))d\xi_i(t),$$

$$\left(\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2}(t, \xi(t))d\xi(t), d\xi(t)\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_i \partial x_j}(t, \xi(t))d\xi_i(t)d\xi_j(t).$$

Как и выше, последнюю формулу для $d\mathrm{F}(t, \xi(t))$ можно записать символически еще короче:

$$d\mathrm{F}(t, \xi(t))=\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}dt+\left(d\xi, \frac{\partial}{\partial x}\right)\mathrm{F}+\frac{1}{2}\left(d\xi, \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \mathrm{F}.$$

Замечание 2. В случае, когда $\mathrm{F}(t, x)=\mathrm{F}(t, x_1, \ldots, x_n)$ есть векторозначная функция со значениями в $\mathbb{R}^p$, случайный процесс $\eta(t)=\mathrm{F}(t, \xi(t))=(\mathrm{F}_1(t, \xi(t)), \ldots, \mathrm{F}_p(t, \xi(t)))$ со значениями в $\mathbb{R}^p$ также имеет стохастический дифференциал Ито $d\eta(t):=(d\eta_1(t), \ldots, d\eta_p(t))$, где выражение для $d\eta_k(t)$, $\eta_k(t)=\mathrm{F}_k(t, \xi(t))\ (k=1, \ldots, p)$ получается из предыдущей (см. выше) формулы заменой F на F_k.

Формула Ито дифференцирования сложной функции носит также название формулы замены переменных в стохастическом интеграле.

Приведем теперь формулу дифференцирования сложной функции $\eta(t)=\mathrm{F}(t, \xi(t))$, где $\xi(t)=\xi(t, \omega)$, $t\in[t_0, \mathrm{T}]$, – случайный процесс со значениями в $\mathbb{R}^n$, определяемый интегральным уравнением:

$$\xi(t)=\xi(t_0)+\int_{t_0}^{t} b(\tau, \xi(\tau))d\tau+\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau, \xi(\tau))\circ dw(\tau), \quad t\in[t_0, \mathrm{T}],$$

где $b:[t_0, \mathrm{T}]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $\sigma:[t_0, \mathrm{T}]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times m}$, $w=(w_1, \ldots, w_m)$ – m-мерный винеровский процесс, а второй интеграл в правой части есть стохастический интеграл в смысле Стратоновича.

Выписанное выше интегральное уравнение Стратоновича *символически* записывается как уравнение в дифференциальной форме:

$$d\xi(t) = b(t,\, \xi(t))\,dt + \sigma(t,\, \xi(t)) \circ dw(t).$$

Выражение в правой части называется *стохастическим дифференциалом Стратоновича*. Как и в стохастических дифференциалах Ито, последнее равенство – это лишь сокращенная запись выписанного выше интегрального соотношения.

Утверждение 4 ([33]). Пусть

$$d\xi(t) = b(t,\, \xi(t))\,dt + \sigma(t,\, \xi(t)) \circ dw(t)$$

и $\mathrm{F}(t,x)$ – гладкая числовая функция, $t \in [t_0, \mathrm{T}]$, $x \in \mathbb{R}^n$ (то есть $\mathrm{F} \in \mathrm{C}^{1,1}([t_0, \mathrm{T}] \times \mathbb{R}^n)$). Тогда процесс $\eta(t) = \mathrm{F}(t, \xi(t))$ имеет стохастический дифференциал Стратоновича:

$$d\eta(t) = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}(t,\, \xi(t))\,dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i}(t,\, \xi(t)) \circ d\xi_i = \left[\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x},\, b\right)\right] dt + \sum_{r=1}^{m} \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x},\, \sigma_r\right) \circ dw_r(t),$$

где $\partial \mathrm{F}/\partial x = (\partial \mathrm{F}/\partial x_1, \dots, \partial \mathrm{F}/\partial x_n)$; $b = (b_1, \dots, b_n)$; σ_r – r-й столбец матрицы σ; $(*,*)$ – скалярное произведение.

Как это видно из формулы для $d\eta(t)$, для стохастических дифференциалов Стратоновича имеет место обычное правило дифференцирования сложной функции: здесь в отличие от формулы Ито нет дополнительного слагаемого с частными производными второго порядка $\dfrac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_i \partial x_j}$.

2.5. Стохастические дифференциальные уравнения

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ – вероятностное пространство с возрастающим семейством σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t\}_{t \ge 0}$: $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ для всех $0 \le s < t < \infty$ ($\{\mathcal{F}_t\}$ – поток событий). Пусть $w(t) = w(t,\, \omega) = (w_1(t),\, \dots,\, w_m(t))^{\mathrm{T}}$, $t \ge 0$ – m-мерный винеровский процесс, определенный на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ и согласованный с семейством $\{\mathcal{F}_t\}$ (при каждом $t \in [0, +\infty)$ случайная величина $w(t)$ измерима относительно $\mathcal{F}_t$). Предположим, что приращения $w(t+h) - w(t)$, $h > 0$, не зависят от σ-алгебры $\mathcal{F}_t$ (то есть от любого события $\mathrm{A} \subset \mathcal{F}_t$). В этом случае говорят, что семейство $\{\mathcal{F}_t\}$ является *неупреждающим* по отношению к винеровскому процессу $w(t)$. Пусть $0 \le t_0 < \mathrm{T} < \infty$. Пусть $x_0 = x_0(\omega)$ – $\mathcal{F}_{t_0}$-измеримая случайная величина со значениями в $\mathbb{R}^n$ такая, что $\mathrm{M}\|x_0(\omega)\|^2 < \infty$ (здесь $\|\bullet\|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$).

Предположим, что случайные величины $x_0(\omega)$ и $w(t,\, \omega) - w(t_0,\, \omega)$ $(t \ge t_0)$ независимы. Это условие выполняется, если $x_0(\omega) = const$ с вероятностью 1. Для дальнейших целей достаточно в качестве $\mathcal{F}_t$ выбрать наименьшую σ-алгебру, по отношению к которой случайная величина $x_0(\omega)$ и случайные величины $w(s,\, \omega)$, $t_0 \le s \le t$, измеримы: $\mathcal{F}_t := \sigma\{x_0(\omega);\, w(s,\, \omega),\, t_0 \le s \le t\}$.

Пусть на множестве $[t_0, \mathrm{T}] \times \mathbb{R}^n$ заданы две измеримые (по Борелю) неслучайные функции: n-мерная векторная функция $b(t,x) = (b_1(t,x), \dots, b_n(t,x))^{\mathrm{T}}$, значения которой есть вещественные векторы из $\mathbb{R}^n$ и $(n\times m)$-матричнозначная функция $\sigma(t,x)$, значениями которой являются вещественные матрицы размерности $n\times m$, $t\in[t_0,\mathrm{T}]$, $x=(x_1,\dots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$.

Ниже всюду предполагается, что все рассматриваемые процессы являются сепарабельными.

2.5.1. Стохастическое дифференциальное уравнение Ито

Рассмотрим уравнение вида – стохастический дифференциал Ито в форме

$$dx(t)=b(t,x(t))dt+\sigma(t,x(t))dw(t),\quad t_0\le t<\mathrm{T}<\infty, \tag{1}$$

или в координатах – систему уравнений

$$\begin{cases} dx_1(t)=b_1(t,\ x(t))dt+ & \sum\limits_{r=1}^{m}\sigma_{1r}(t,\ x(t))dw_r(t),\\ \qquad\vdots & \qquad\vdots\\ dx_n(t)=b_n(t,\ x(t))dt+ & \sum\limits_{r=1}^{m}\sigma_{nr}(t,\ x(t))dw_r(t) \end{cases}$$

относительно случайного процесса $x(t)=x(t,\omega)=(x_1(t,\omega),\dots,x_n(t,\omega))$ с $x(t_0)=x_0(\omega)$, где функции $b(t,x)$, $\sigma(t,x)$ и винеровский процесс $w(t)$ удовлетворяют описанным выше условиям. Отметим, что при фиксированном (t,x) функции $b(t,x)$ и $\sigma(t,x)$ не зависят от $\omega\in\Omega$, то есть случайный параметр ω появляется только косвенно в коэффициентах в уравнении (1) в форме $b(t,x(t,\omega))$ и $\sigma(t,x(t,\omega))$. (Обобщение см. [7, с. 102].)

Уравнение (1) по определению (стохастического дифференциала) означает, что задано интегральное уравнение

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t}b(\tau,x(\tau))d\tau+\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau,x(\tau))dw(\tau),\quad t_0\le t<\mathrm{T}, \tag{2}$$

относительно неизвестной случайной функции $x(t)$, которое должно выполняться для любого $t\in[t_0,\mathrm{T}]$ при почти всех $\omega\in\Omega$ (почти наверное).

Уравнение вида (1) с начальным условием $x(t_0)=x_0(\omega)=x_0$, интерпретируемое как интегральное уравнение (2), называется стохастическим дифференциальным уравнением Ито. Случайная величина $x_0(\omega)=x_0$ называется начальным значением в момент времени t_0.

При $\sigma(t,x)\equiv 0$ уравнение (1) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение $dx(t)=b(t,x)dt$, записанное в дифференциалах.

Случайная функция (случайный процесс) $\xi(t)=\xi(t,\omega)$, $t\in[t_0,\mathrm{T}]$, со значениями в $\mathbb{R}^n$ называется *решением стохастического уравнения* (1) на отрезке $[t_0,\mathrm{T}]$ с начальным условием $x(t_0)=x_0=x_0(\omega)$, если:

a) функция $\xi(t)=\xi(t,\omega)$, $t\in[t_0,\mathrm{T}]$, $\omega\in\Omega$, непрерывна по t при почти всех ω;

b) функция $\xi(t)$, $t\in[t_0,\mathrm{T}]$ согласована с семейством σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, то есть при каждом $t\in[t_0,\mathrm{T}]$ случайная величина $\xi(t)$ $\mathcal{F}_t$-измерима (то есть $\xi(t)$, $t\in[t_0,\mathrm{T}]$, есть неупреждающая функция относительно потока событий $\{\mathcal{F}_t\}$);

c) функция $\xi(t)=\xi(t,\omega)$, $t\in[t_0,\mathrm{T}]$, $\omega\in\Omega$, измерима по совокупности переменных (t,ω) (или, более слабое требование, функция $\xi(t)$ прогрессивно измерима относительно семейства $\{\mathcal{F}_t\}$ σ-алгебр $\mathcal{F}_t$);

d) случайные n-мерная векторная $\tilde{b}(t,\omega)=b(t,\xi(t,\omega))$ и $(n\times m)$-мерная матричная $\tilde{\sigma}(t,\omega)=\sigma(t,\xi(t,\omega))$ функции измеримы по (t,ω) (или прогрессивно измеримы) и $\mathrm{M}\int_{t_0}^{\mathrm{T}}\left\|\tilde{b}(t,\omega)\right\|dt<\infty$, $\mathrm{M}\int_{t_0}^{\mathrm{T}}\left\|\tilde{\sigma}(t,\omega)\right\|^2dt<\infty$ (или, более слабое требование, $\mathrm{P}\left\{\omega:\int_{t_0}^{\mathrm{T}}\left\|\tilde{b}(t,\omega)\right\|dt<\infty\right\}=1$, $\mathrm{P}\left\{\omega:\int_{0}^{\mathrm{T}}\left\|\tilde{\sigma}(t,\omega)\right\|^2dt<\infty\right\}=1$), где $\|\bullet\|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^{n\times m}$;

e) для каждого $t\in[t_0,\mathrm{T}]$ при почти всех ω (то есть с вероятностью 1) имеет место равенство:

$$\xi(t,\omega)=x_0(\omega)+\int_{t_0}^{t}b(\tau,\xi(\tau,\omega))d\tau+\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau,\xi(\tau,\omega))dw(t,\omega). \tag{3}$$

Коротко: случайная функция $\xi(t)=\xi(t,\omega)$, $t\in[t_0,\mathrm{T}]$, называется решением стохастического уравнения (1) с начальным условием $x(t_0)=x_0$, если функция $\xi(t)=\xi(t,\omega)$ непрерывна по t при почти всех ω, измерима по совокупности переменных (t,ω), $\mathcal{F}_t$-измерима, интегралы в (2) существуют и при подстановке $\xi(t)$ вместо $x(t)$ равенство (2) выполняется при каждом $t\in[t_0,\mathrm{T}]$ с вероятностью 1.

Решение $\xi(t)$, $t\in[t_0,\mathrm{T}]$, с начальным условием $\xi(t_0)=x_0(\omega)$ *единственно*, если для любого другого решения $\eta(t)$, $t\in[t_0,\mathrm{T}]$, с $\eta(t_0)=x_0(\omega)$, $\mathrm{P}\{\omega:\xi(t,\omega)=\eta(t,\omega)$ для всех $t\in[t_0,\mathrm{T}]\}=1$. В этом случае решения $\xi(t)$ и $\eta(t)$ называются *эквивалентными*.

Замечание 3. Если $\xi(t)$ – решение уравнения (1), то любой процесс $\tilde{\xi}(t)$, стохастически эквивалентный $\xi(t)$, есть тоже решение уравнения (1). Действительно, если для каждого фиксированного $t\in[t_0,\mathrm{T}]$ $\xi(t,\omega)=\tilde{\xi}(t,\omega)$ с вероятностью 1, то в силу сепарабельности (по предположению) процессов $\xi(t,\omega)$ и $\tilde{\xi}(t,\omega)$ будем иметь: для почти всех ω равенство $\xi(t,\omega)=\tilde{\xi}(t,\omega)$ выполняется для всех $t\in[t_0,\mathrm{T}]$, то есть процессы $\xi(t,\omega)$ и $\tilde{\xi}(t,\omega)$ эквивалентны. Поэтому соответствующие им интегралы в правой части равенства (3) будут равны с вероятностью 1. Следовательно, при подстановке $\tilde{\xi}(t,\omega)$ вместо $\xi(t,\omega)$ в (3) получим, что левая и правая части равны с вероятностью 1, и, стало быть, $\tilde{\xi}(t,\omega)$ – решение.

Замечание 4. Для всякого решения $\xi(t,\omega)$ уравнения (1) существует стохастически эквивалентное ему непрерывное решение $\tilde{\xi}(t,\omega)$, то есть решение, почти все траектории которого непрерывны. Действительно, подстановка $\xi(t,\omega)$ в правую часть (2) даст случайный процесс $\tilde{\xi}(t,\omega)$, непрерывный по t с вероятностью 1 (первый интеграл в (2) абсолютно непрерывен, а для второго, стохастического интеграла, существует непрерывная версия); этот процесс стохастически эквивалентен левой части (2), то есть $\xi(t,\omega)$ – решению. Следовательно, в силу замечания 3, правая часть (2) – процесс $\tilde{\xi}(t,\omega)$ – будет решением уравнения (1), имеющим при почти всех ω непрерывные траектории.

В частном случае, когда $b(t,x)\equiv b(t)$ и $\sigma(t,x)\equiv\sigma(t)$, и $b\in\mathcal{L}^1([t_0,\mathrm{T}],\mathbb{R}^n)$, $\sigma\in\mathcal{L}^2([t_0,\mathrm{T}],\mathbb{R}^{n\times m})$ получаем стохастическое дифференциальное уравнение вида (1): $dx(t)=b(t)dt+\sigma(t)dw(t)$, коэффициенты которого не зависят от $x(t,\omega)$ и, следовательно, от ω. Тогда решением уравнения (1) является случайная функция

$$\xi(t,\omega)=x_0(\omega)+\int_{t_0}^{t}b(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau)dw(t,\omega).$$

Замечание 5. Грубо говоря, решение $\xi(t)$ уравнения (1) или (2) формируется так: для почти каждого $\omega\in\Omega$ (и, следовательно, для почти каждого выбора $x_0(\omega)$ и реализации $w(t,\omega)$), уравнение (2) есть детерминистическое уравнение относительно неслучайной функции $x(t,\omega)$. Это уравнение определяет реализацию $\xi(t,\omega)$ нового случайного процесса $\xi(t)$, $t\in[t_0,\mathrm{T}]$, которое удовлетворяет стохастическому уравнению (2): при почти всех ω реализации $\xi(t,\omega)$, $t\in[t_0,\mathrm{T}]$, удовлетворяют (2), и, следовательно, равенство (3) выполняется для любого $t\in[t_0,\mathrm{T}]$ при почти всех ω. Таким образом, имеем следующую ситуацию. Уравнение (1) или (2) задается двумя неслучайными функциями $b:[t_0,\mathrm{T}]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ и $\sigma:[t_0,\mathrm{T}]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times m}$, с одной стороны, и двумя независимыми случайными элементами $x_0(\omega)$ и $w:[t_0,\mathrm{T}]\times\Omega\to\mathbb{R}^m$ – с другой. При заданных b и σ паре $(x_0(\omega),\ w(s),\ t_0\le s\le t)$ с учетом того, что, по определению, $\xi(t)$ измерима относительно $\mathcal{F}_t=\sigma\{x_0(\omega);\ w(s),\ t_0\le s\le t\}$, ставится в соответствие (при условии существования единственного решения) случайный процесс $\xi(t)$, $t\in[t_0,\mathrm{T}]$, – решение уравнения (1), то есть $\xi(t)$ является фактически функцией от $x_0(\omega)$ и $w(s)$, $t_0\le s\le t$:

$$\xi(t)=\Phi\left(x_0;\ w(s),\ t_0\le s\le t\right),$$

где Φ – отображение множества $\{x_0;\ w(s),\ t_0\le s\le t\}$ в пространство случайных величин $\mathcal{L}^2(\Omega,\mathbb{R}^n)$.

Пример 3. Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка с «белым шумом» вида:

$$y^{(n)}=f\left(t,\ y(t),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t)\right)+g\left(t,\ y(t),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t)\right)\dot{w}(t), \tag{4}$$

где $y(t)=y(t,\omega)$ – неизвестная числовая случайная функция, f и g – заданные неслучайные функции $f:[t_0,\mathrm{T}]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $g:[t_0,\mathrm{T}]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{1\times m}$, $\dot{w}(t)=\left(\dot{w}_1(t),\ \ldots,\ \dot{w}_m(t)\right)^{\mathrm{T}}$ – m-мерный белый шум, а $w(t)=\left(w_1(t),\ \ldots,\ w_m(t)\right)^{\mathrm{T}}$ – m-мерный винеровский процесс.

Рассматриваемое уравнение (пока формальное) n-го порядка (4) будем понимать как систему стохастических уравнений Ито. Для этого введем новые случайные функции: $x_1(t)=y(t)$, $x_2(t)=y'(t),\ldots,x_n(t)=y^{(n-1)}(t)$ и преобразуем данное уравнение n-го порядка в систему уравнений Ито:

$$\begin{cases} dx_1(t) = x_2(t)\,dt, \\ dx_2(t) = x_3(t)\,dt, \\ \vdots \\ dx_n(t) = f(t,\, x_1(t),\, \dots,\, x_n(t)) + g_1(t,\, x_1(t),\, \dots,\, x_n(t))\,w_1(t) + \dots + g_m(t,\, x_1(t),\, \dots,\, x_n(t))\,w_m(t). \end{cases}$$

Последняя система стохастических дифференциальных уравнений как раз и выражает точный смысл уравнения (4).

2.5.2. Существование и единственность решения

Теперь обратимся к вопросу существования и единственности решения стохастического уравнения Ито (1). Следующая теорема дает достаточные условия существования и единственности решения уравнения (1).

Теорема 2.1 (теорема существования и единственности [3, 5–7, 9])**.** *Пусть задано стохастическое дифференциальное уравнение Ито* (1). *Пусть* $x_0 = x_0(\omega)$ *–* n*-мерная случайная величина с* $\mathrm{M}\|x_0(\omega)\|^2 < \infty$ (*то есть* $x_0 \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$), *не зависящая от* $w(t) - w(t_0)$ *для* $t \ge t_0$.

Предположим, что n*-мерная векторная функция* $b(t,x)$ *и* $(n \times m)$*-мерная матричная функция* $\sigma(t,x)$, *определены, измеримы на множестве* $[t_0, \mathrm{T}] \times \mathbb{R}^n$ *и удовлетворяют следующим условиям: существуют константы* $\lambda > 0$ *и* $\mathrm{K} > 0$ *такие, что*:

а) (*глобальное условие Липшица*) *для всех* $t \in [t_0, \mathrm{T}]$ *и всех* $x, y \in \mathbb{R}^n$ $\|b(t,x) - b(t,y)\| \le \mathcal{L}\|x - y\|$, $\|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \le \mathcal{L}\|x - y\|$ (*здесь* $\|\sigma\|^2 = \sum|\sigma_{ir}|^2 = \sum\|\sigma_r\|^2$, σ_r *– столбцы матрицы* σ);

b) (*условие линейного роста*) *для всех* $t \in [t_0, \mathrm{T}]$ *и всех* $x \in \mathbb{R}^n$ $\|b(t,x)\| \le \mathrm{K}(1 + \|x\|)$, $\|\sigma(t,x)\| \le \mathrm{K}(1 + \|x\|)$.

Тогда:

1) *стохастическое уравнение* (1) *имеет единственное решение* $x(t,\omega)$, *определенное на промежутке* $[t_0, \mathrm{T}]$ *и непрерывное по* $t \in [t_0, \mathrm{T}]$ (*то есть реализации* $x(\omega): [t_0, \mathrm{T}] \to \mathbb{R}^n$ *случайной функции* $x(t,\omega)$ *непрерывны при почти всех* ω) *такое, что удовлетворяет начальному условию* $x(t_0, \omega) = x_0(\omega)$;

2) *решение* $x(t,\omega)$ *принадлежит пространству* $\mathcal{M}^2([t_0, T], \mathbb{R}^n)$, *то есть*: а) $x(t,\omega)$ *измеримо по* (t,ω) *на множестве* $[t_0, \mathrm{T}] \times \mathbb{R}^n$; b) $x(t,\omega)$ *согласовано* (*то есть* $\mathcal{F}_t$*-измеримо*) *с семейством (потоком)* $\{\mathcal{F}_t\}$ σ*-алгебр* $\mathcal{F}_t = \sigma\{x_0(\omega);\, w(s,\, \omega),\, t_0 \le s \le t\}$, *порожденным* $x_0(\omega)$ *и случайными величинами* $w(s,\, \omega)$, $t_0 \le s \le t$; c) $\mathrm{M}\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \|x(t,\omega)\|^2 dt < \infty$.

Единственность решения $x(t,\omega)$ *с начальным условием* $x(t_0, \omega) = x_0(\omega)$ *означает, что если* $y(t,\omega)$ *– другое непрерывное по* t *решение с тем же начальным условием* $y(t_0, \omega) = x_0(\omega)$, *то*

$$\mathrm{P}\left\{\omega : \sup_{t \in [t_0, \mathrm{T}]} \|x(t,\omega) - y(t,\omega)\| > 0\right\} = 0,$$

то есть если решения $x(t,\omega)$ *и* $y(t,\omega)$ *эквивалентны.*

Замечание 6. Из условия a) (Липшица) теоремы 2.1 следует, что функции $b(t,x)$ и $\sigma(t,x)$ *равномерно непрерывны* по переменной x для всех $t \in [t_0, \mathrm{T}]$. Если функции $b(t,x)$ и $\sigma(t,x)$ непрерывны по (t,x) на $[0,\mathrm{T}] \times \mathbb{R}^n$ (и, следовательно, $b(t,x_0)$ и $\sigma(t,x_0)$ ограничены на $[t_0, \mathrm{T}]$ при любом фиксированном $x_0 \in \mathbb{R}^n$) условие b) фактически следует из a).

Замечание 7. Теорема 2.1 остается в силе, если, оставив условие b) линейного роста, заменить условие a) (глобальное условие Липшица) на более слабое (и, значит, более общее) – *локальное условие Липшица*: для любого $\mathrm{N} > 0$ существует константа $\mathcal{L}_\mathrm{N} > 0$ такая, что для всех $t \in [t_0, \mathrm{T}]$ и всех $x, y \in \mathbb{R}$ с $\|x\| \le \mathrm{N}$ и $\|y\| \le \mathrm{N}$

$$\|b(t,x) - b(t,y)\| \le \mathcal{L}_\mathrm{N} \|x - y\|, \quad \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \le \mathcal{L}_\mathrm{N} \|x - y\|.$$

Замечание 8. Для того, чтобы глобальное (локальное) условие Липшица было выполнено, достаточно, чтобы функции $b(t,x)$ и $\sigma(t,x)$ имели непрерывные частные производные первого порядка относительно компонент вектора x для любого $t \in [t_0, \mathrm{T}]$ и были ограничены на $[t_0, \mathrm{T}] \times \mathbb{R}^n$ (или в случае локального условия Липшица на $[t_0, \mathrm{T}] \times \{|x| \le \mathrm{N}\}$).

Замечание 9. Если функции $b(t,x)$ и $\sigma(t,x)$ определены на $[t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ и удовлетворяют условиям теоремы 2.1 (где, возможно, глобальное условие Липшица заменено на локальное) на любом конечном подынтервале $[t_0, \mathrm{T}] \subset [t_0, +\infty)$ (тогда в условии Липшица константа $\mathcal{L}$ зависит, вообще говоря, от T: $\mathcal{L} := \mathcal{L}_\mathrm{T}$), то уравнение (1) (или (2)) имеет единственное с точностью до эквивалентности непрерывное решение, определенное на *всем* бесконечном промежутке $[t_0, +\infty)$. Такое решение называется *глобальным* решением. (Если в теореме 2.1 вместо условия a) имеем локальное условие Липшица, то константа $\mathcal{L}_\mathrm{N}$ зависит, вообще говоря, и от T: $\mathcal{L}_\mathrm{N} := \mathcal{L}_{\mathrm{TN}}$).

Замечание 10. В случае, когда уравнение (1) есть автономное стохастическое дифференциальное уравнение, то есть когда $b(t,x) \equiv b(x)$ и $\sigma(t,x) \equiv \sigma(x)$, существование единственного с точностью до эквивалентности непрерывного глобального решения на всем промежутке $[t_0, +\infty)$ гарантируется при выполнении следующего глобального условия Липшица: существует константа $\mathcal{L} > 0$ такая, что для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\|b(x) - b(y)\| \le \mathcal{L} \|x - y\|, \quad \|\sigma(x) - \sigma(y)\| \le \mathcal{L} \|x - y\|.$$

Условие линейного роста (условие b) в теореме 2.1) функций $b(x)$ и $\sigma(x)$ следует из глобального условия Липшица (если зафиксировать $y = y_0$). Если глобальное условие Липшица (последние два неравенства) не выполняется, а выполняется *локальное* условие Липшица: для любого $\mathrm{N} > 0$ существует константа $\mathcal{L}_\mathrm{N} > 0$ такая, что для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$ с $\|x\| \le \mathrm{N}$ и $\|y\| \le \mathrm{N}$

$$\|b(x) - b(y)\| \le \mathcal{L}_\mathrm{N} \|x - y\|, \quad \|\sigma(x) - \sigma(y)\| \le \mathcal{L}_\mathrm{N} \|x - y\|,$$

то для существования единственного (с точностью до эквивалентности) непрерывного глобального решения достаточно выполнение условия линейного роста функций $b(x)$ и $\sigma(x)$: существует константа $\mathrm{K} > 0$ такая, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|b(x)\| \le \mathrm{K}(1 + \|x\|), \quad \|\sigma(x)\| \le \mathrm{K}(1 + \|x\|).$$

Доказательство теоремы 2.1 основано на аналогичном для обыкновенных дифференциальных уравнений методе последовательных приближений Пикара-Линделефе (см. [5, с. 93–97; 6, с. 52–55; 7, с. 106–111; 9, с. 91–94; 10, с. 470–474; 11, с. 240–244]). Свойства решений стохастического дифференциального уравнения (1), включая стохастически непрерывную, непрерывную в среднем квадратическом, дифференцируемую в среднем квадратическом зависимость решений от начальных значений и от параметров, можно найти в указанных выше источниках.

Пример 4. Рассмотрим скалярное линейное стохастическое дифференциальное уравнение:

$$dx(t)=\big(a(t)x(t)+b(t)\big)dt+\big(\sigma(t)x(t)+\beta(t)\big)dw(t), \tag{5}$$

где $x(t)=x(t,\omega)$ и $w(t)=w(t,\,\omega)$ – случайные функции, $t\in[t_0,\mathrm{T}]$, $\omega\in\Omega$, а $a(t)$, $b(t)$, $\sigma(t)$, $\beta(t)$ – неслучайные функции, определенные на $[t_0,\mathrm{T}]$.

Из теоремы 2.1 непосредственно следует, что уравнение (5) имеет для любого начального значения $x(t_0)=x_0(\omega)$, не зависящего от $w(t)-w(t_0)$ $(t\ge t_0)$, *единственное непрерывное по* t *решение*, определенное на всем отрезке $[t_0,\mathrm{T}]$, если функции $a(t)$, $b(t)$, $\sigma(t)$ и $\beta(t)$ *измеримы и ограничены* на отрезке $[t_0,\mathrm{T}]$. Если последнее условие имеет место для любого отрезка $[t_0,\mathrm{T}]\subset[t_0,+\infty)$, то существует единственное глобальное (то есть определенное для всех $t\in[t_0,+\infty)$) решение уравнения (5).

Уравнение (5) называется *однородным* линейным стохастическим дифференциальным уравнением, если $b(t)\equiv 0$, $\beta(t)\equiv 0$ на $[t_0,\mathrm{T}]$:

$$dx(t)=a(t)x(t)dt+\sigma(t)x(t)dw(t). \tag{6}$$

Используя одномерную формулу Ито (см. утверждение 1), можно непосредственно убедиться, что решение уравнения (6) с начальным значением $x(t_0)=c$ $(=\mathrm{const})$ дается формулой:

$$x(t)=c\,\exp\left\{\int_{t_0}^{t}\left(a(\tau)-\frac{1}{2}\sigma(\tau)^2\right)dt+\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau)dw(\tau)\right\}.$$

Действительно, обозначим

$$\xi(t):=\int_{t_0}^{t}\left(a(\tau)-\frac{1}{2}\sigma(\tau)^2\right)dt+\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau)dw(\tau).$$

Тогда по определению стохастического дифференциала

$$d\xi(t)=\left(a(t)-\frac{\sigma(t)^2}{2}\right)dt+\sigma(t)dw(t).$$

Возьмем функцию $\mathrm{F}(t,x)\equiv\mathrm{F}(x)=ce^x$. Применяя формулу Ито к сложной функции $\mathrm{F}(\xi(t))=ce^{\xi(t)}$, имеем:

$$d\left(ce^{\xi(t)}\right)=cde^{\xi(t)}=c\left[e^{\xi(t)}\cdot d\xi(t)+\frac{1}{2}e^{\xi(t)}\sigma(t)^2\right]=c\left[e^{\xi(t)}\left(a(t)-e^{\xi(t)}\frac{\sigma(t)^2}{2}\right)+e^{\xi(t)}\frac{\sigma(t)^2}{2}\right]dt+e^{\xi(t)}\sigma(t)dw(t)=$$

$$=c\left(e^{\xi(t)}a(t)dt+e^{\xi(t)}\sigma(t)dw(t)\right)=a(t)\left(ce^{\xi(t)}\right)dt+\sigma(t)\left(ce^{\xi(t)}\right)dw(t),$$

то есть случайная функция $x(t)=ce^{\xi(t)}$ удовлетворяет стохастическому уравнению (6).

Замечание 11. Выше, в разделах 2.5.1 и 2.5.2, вероятностное пространство

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, семейство σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ (поток событий), винеровский процесс $\mathrm{w}(t)$, $t \geq 0$, и коэффициенты $b(t,x)$, $\sigma(t,x)$ заданы заранее, а затем строится решение. Так построенное решение называется *сильным* решением. Если же нам даны лишь функции $b(t,x)$ и $\sigma(t,x)$ и нужно построить подходящее вероятностное пространство, фильтрацию (поток событий), винеровский процесс и найти соответствующее решение уравнения (1), то такое решение (если оно существует) называется *слабым* решением. Таким образом, в последнем случае нужно построить пару процессов $(\xi(t), w(t))$ на подходящем вероятностном пространстве (Ω, F, P), такую, что справедливо равенство (1) (то есть (2)). Здесь F_t – возрастающее семейство σ-алгебр таких, что процесс $\xi(t)$ является F_t-согласованным, а $w(t)$ есть F_t-винеровский процесс, то есть $w(t)$ есть винеровский процесс, определенный на (Ω, F, P) и согласованный с семейством $\{F_t\}$. Сильное решение также является слабым решением, но обратное, вообще говоря, неверно. Соответствующий пример дает уравнение Танаки (Tanaka): $dx(t) = sign(x(t))dw(t)$, $x(0) = 0$. Это уравнение не имеет сильных решений, но слабые решения существуют [см. 5, с. 98]. Далее, единственность, которая утверждается в теореме 2.1, называется *сильной* единственностью (в смысле совпадения траекторий с вероятностью 1). Если же два решения (сильные или слабые) имеют одинаковые конечномерные распределения (то есть тождественны по вероятностному закону), то говорят, что имеет место *слабая* единственность. *Если функции* $b(t,x)$ *и* $\sigma(t,x)$ *удовлетворяют теореме* 2.1, *то решение (сильное или слабое) уранения* (1) *слабо единственно* [5, с. 97]. Отметим, что с точки зрения моделирования понятие слабого решения является более естественным, поскольку явное представление белого шума не задается заранее. Более того, это понятие более удобно и с математической точки зрения, потому что существуют уравнения (например, уравнение Танаки), у которых нет сильных решений, однако обладают (слабо) единственными слабыми решениями.

2.5.3. Решения стохастического дифференциального уравнения как марковские процессы

Сначала дадим определение марковского процесса и связанных с ним понятий.

Пусть имеется случайный процесс $\xi(t,\omega)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$, определенный при $t \in [t_0, \mathrm{T}] \subseteq [0, \infty)$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$.

А. Марковский процесс. Случайный процесс $\xi(t,\omega)$, $t \in [t_0, \mathrm{T}] \subseteq [0,\infty)$, называется марковским процессом, если для любого борелевского множества $\mathrm{B} \in \mathcal{B}$ и всех $s, t \in [t_0, \mathrm{T}]$, $s < t$, выполнено соотношение

$$\mathrm{P}\{\omega : \xi(t,\omega) \in \mathrm{B} \mid \mathcal{F}_s\} = \mathrm{P}\{\omega : \xi(t,\omega) \in \mathrm{B} \mid \xi(s,\omega)\}$$

при почти всех ω, где $\mathcal{B}$ – σ-алгебра всех борелевских множеств в $\mathbb{R}^n$, а

$$\mathcal{F}_s = \sigma(\xi(u,\omega),\ u \in [t_0, \mathrm{T}],\ u \leq s) := \sigma(\{\omega : \xi(u,\omega) \in \mathrm{B}\},\ u \in [t_0, \mathrm{T}],\ u \leq s,\ \ \mathrm{B} \in \mathcal{B}) -$$

σ-алгебра, порожденная случайным процессом $\xi(u,\omega)$, $u \in [t_0, \mathrm{T}]$, $u \leq s$, то есть σ-алгебра событий, порожденная событиями вида $\{\omega : \xi(u,\omega) \in \mathrm{B}\}$, $u \in [t_0, \mathrm{T}]$, $u \leq s$, $\mathrm{B} \in \mathcal{B}$. (Промежуток $[t_0, \mathrm{T}]$ может совпадать с $[0, +\infty)$.)

Определение марковского процесса можно дать и в других эквивалентных формулировках ([7, с. 29; 11, с. 132]). Приведем их.

Введем для любого $s \in [t_0, \mathrm{T}]$ σ-алгебры событий:

$\mathcal{F}_{u\le s} := \mathcal{F}_s = \sigma(\xi(u,\omega),\ t_0 \le u \le s)$;

$\mathcal{F}_{u=s} = \sigma(\xi(u,\omega),\ t_0 \le u = s) := \sigma(\{\omega : \xi(s,\omega) \in \mathrm{B}\},\ \ \mathrm{B} \in \mathcal{B})$;

$\mathcal{F}_{u\ge s} = \sigma(\xi(u,\omega),\ u \in [t_0, \mathrm{T}],\ u > s \ge t_0) := \sigma(\{\omega : \xi(u,\omega) \in \mathrm{B}\},\ u \ge s \ge t_0,\ \ \mathrm{B} \in \mathcal{B})$.

Случайный процесс $\xi(t,\omega)$, $t \in [t_0, \mathrm{T}]$, называется *марковским*, если выполняется одно из следующих эквивалентных между собой соотношений:

a) для любого $s \in [t_0, \mathrm{T}]$ и любого $\mathrm{A} \in \mathcal{F}_{u>s}$ $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathcal{F}_s) = \mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathcal{F}_{u=s})$ почти наверное (п. н.);

b) для любого $s \in [t_0, \mathrm{T}]$ и любых событий $\mathrm{A}_1 \in \mathcal{F}_{u\le s}$ и $\mathrm{A}_2 \in \mathcal{F}_{u\ge s}$ $\mathrm{P}(\mathrm{AB}|\mathcal{F}_{u=s}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_1|\mathcal{F}_{u=s})\mathrm{P}(\mathrm{A}_2|\mathcal{F}_{u=s})$ п. н.;

c) для любых $n \ge 1$, $t_0 \le t_1 < \ldots < t_n < t \le \mathrm{T}$ и любого борелевского множества $\mathrm{B} \in \mathcal{B}$:

$$\mathrm{P}\{\omega : \xi(t,\omega) \in \mathrm{B} \mid \xi(t_1,\omega), \ldots, \xi(t_n,\omega)\} = \mathrm{P}\{\omega : \xi(t,\omega) \in \mathrm{B} \mid \xi(t_n,\omega)\} \text{ (п. н.).}$$

Все выписанные выше соотношения представляют собой равенства условных вероятностей относительно соответствующих σ-алгебр событий, связанных с процессом $\xi(t,\omega)$. Эти равенства выполняются с вероятностью 1.

Указанные выше соотношения, определяющие марковский процесс $\xi(t,\omega)$, выражают так называемое марковское свойство: *если имеется марковский процесс, то прошлое и будущее статистически независимы при известном настоящем*.

B. Переходная функция. Дадим определение переходной функции марковского процесса.

Переходная функция марковского процесса $\xi(t,\omega)$, $t \in [t_0, \mathrm{T}]$, со значениями в $\mathbb{R}^n$ есть функция четырех аргументов $\mathrm{P}(s, x, t, \mathrm{A})$, определенная для $s, t \in [t_0, \mathrm{T}]$, $s \le t$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{A} \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ – σ-алгебра всех борелевских множеств пространства $\mathbb{R}^n$), со следующими свойствами ([6, с. 84; 7, с. 30; 11, с. 133]):

a) при фиксированных $s \le t$, $\mathrm{A} \in \mathcal{B}$ $\mathrm{P}(s, \xi(s,\omega), t, \mathrm{A}) = \mathrm{P}\{\omega : \xi(t,\omega) \in \mathrm{A} \mid \xi(s,\omega)\}$ п. н.;

b) при фиксированных $s \le t$ и $x \in \mathbb{R}^n$ функция $\mathrm{P}(s, x, t, \bullet)$ является вероятностной мерой на σ-алгебре $\mathcal{B}$ (вероятностной – то есть $\mathrm{P}(s, t, x, \mathbb{R}^n) = 1$);

c) при фиксированных $s \le t$ и $\mathrm{A} \in \mathcal{B}$ функция $\mathrm{P}(s, \bullet, t, \mathrm{A})$ измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{B}$;

d) $\mathrm{P}(s, x, s, \mathrm{A}) = 1$, если $\mathrm{A} \ni x$, $\mathrm{P}(s, x, s, \mathrm{A}) = 0$, если $\mathrm{A} \not\ni x$; то есть $\mathrm{P}(s, x, s, \bullet) =: \delta_x(\mathrm{A})$ – это мера на $\mathcal{B}$.

Можно показать [11, с. 148], что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ (за исключением, быть может, множества B такого, что $\mathrm{P}\{\omega : \xi(s,\omega) \in \mathrm{B}\} = 0$) имеет место *уравнение Чэпмена-Колмогорова*:

$$\mathrm{P}(s, x, t, \mathrm{A}) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{P}(s, x, u, dy) \cdot \mathrm{P}(u, y, t, \mathrm{A}).$$

В силу a) основное определение марковского процесса можно переписать в виде:

$$\mathrm{P}\{\omega : \xi(t,\omega) \in \mathrm{B} \mid \mathcal{F}_s\} = \mathrm{P}(s, \xi(s,\omega), t, \mathrm{B}) \text{ (п. н.).}$$

Далее, условие a) можно переписать в другой эквивалентной форме, а именно:

$$\mathrm{P}(s, x, t, \mathrm{A}) = \mathrm{P}\{\omega : \xi(t,\omega) \in \mathrm{A} \mid \xi(s,\omega) = x\}.$$

Последнее равенство следует интерпретировать так: значение переходной функции $\mathrm{P}(s, x, t, \mathrm{A})$ есть условная вероятность того, что в момент времени t система (описываемая процессом $\xi(t, \omega)$) находится во множестве состояний $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{A} \in \mathcal{B})$, при условии, что в данный момент s, предшествующий моменту t, она находилась в состоянии $x \in \mathbb{R}^n$. Это значение переходной функции называют вероятностью перехода из состояния x в момент s во множество A к моменту t.

Марковский процесс $\xi(t, \omega)$, $t \in [t_0, \mathrm{T}]$, называется *однородным* (относительно времени), если его переходная функция $\mathrm{P}(s, x, t, \mathrm{A})$ является стационарной, то есть $\mathrm{P}(s+h, x, t+h, \mathrm{A}) = \mathrm{P}(s, x, t, \mathrm{A})$ для всех $s, t \in [t_0, \mathrm{T}]$, $s \le t$, для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $\mathrm{A} \in \mathcal{B}$. В этом случае переходная функция зависит только от x, $t-s$ и A:

$$\mathrm{P}(s, x, t, \mathrm{A}) = \mathrm{P}(o, x, t-s, \mathrm{A}) =: \mathrm{P}(x, t-s, \mathrm{A}).$$

Примером однородного марковского процесса является винеровский процесс, определенный на $[0, +\infty)$.

C. Марковское семейство. Следующим понятием, связанным с марковским процессом, является марковское семейство случайных процессов. Это понятие предполагает возможность начать случайное движение системы в любой момент времени в произвольной точке фазового пространства $\mathbb{R}^n$.

Предположим для каждого $s \in [t_0, \mathrm{T}]$ и каждого $x \in \mathbb{R}^n$ на σ-алгебре $\mathcal{F}_{u \ge s} = \sigma(\xi(u, \omega),\ u \in [t_0, \mathrm{T}],\ u > s)$ задана вероятностная мера $\mathrm{P}_{s,x}$. Тогда набор элементов $(\xi(t, \omega), \mathrm{P}_{s,x})$, $s \in [t_0, \mathrm{T}]$, $x \in \mathbb{R}^n$, называется марковским семейством с переходной функцией $\mathrm{P}(s, x, t, \mathrm{A})$, если для любых s, x выполняются следующие условия [11, с. 138]:

a) случайный процесс $\xi(t, \omega)$, $t \in [t_0, \mathrm{T}]$, на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}_{u \ge s}, \mathrm{P}_{s,x})$ является марковским;

b) этот марковский процесс обладает указанной выше переходной функцией $\mathrm{P}(s, x, t, \mathrm{A})$;

c) $\mathrm{P}_{s,x}\{\omega : \xi(s, \omega) = x\} = 1$.

Таким образом, здесь мы имеем семейство марковских процессов со своими вероятностными мерами $\mathrm{P}_{s,x}$ определенными на соответствующих σ-алгебрах $\mathcal{F}_{u \ge s}$. Причем, это семейство марковских процессов имеет *общую переходную функцию* $\mathrm{P}(s, x, t, \mathrm{A})$. Последнее равенство c) означает, что вероятность $\mathrm{P}_{s,x}$ событий берется в предположении, что процесс в момент s выпускается из точки x.

Можно указать некоторые условия на переходную функцию $\mathrm{P}(x, t, \mathrm{A}) = \mathrm{P}(o, x, t, \mathrm{A})$, при которых существует марковское семейство с *непрерывными траекториями*, обладающие данной переходной функцией. Одним из таких условий является условие [11, с. 178]:

$$d_\varepsilon(h) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t \le h} \mathrm{P}(x; t, \mathrm{V}_\varepsilon(x)) = o(h) \quad \text{при} \quad h \to 0,$$

где $\mathrm{V}_\varepsilon(x) = \{y : \rho(y, x) \ge \varepsilon\}$ – дополнение ε-окрестности $\mathrm{U}_\varepsilon(x) = \{y : \rho(y, x) < \varepsilon\}$ точки $x \in \mathbb{R}^n$.

Примером марковского семейства является *семейство винеровских процессов* $(w(t, \omega), \mathrm{P}_{s,x})$, выходящих из всевозможных начальных точек.

D. Инфинитезимальный оператор. С однородной переходной функцией

$\mathrm{P}(x, t-s, \mathrm{A}) =: \mathrm{P}(x, t, \mathrm{A})$ связаны два *семейства операторов* $\{\mathrm{H}^t, t \geq 0\}$ и $\{\mathrm{M}^t, t \geq 0\}$, первый из них действует на функции, а второй – на меры:

$$(\mathrm{H}^t f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\mathrm{P}(x, t, dy) = \mathrm{M}f(\xi_x(t, \omega)), \xi_x(0) = x, \quad (\mathrm{M}^t \mu)(\mathrm{A}) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu(dx)\mathrm{P}(x, t, \mathrm{A}).$$

Здесь $f \in \mathrm{B}(\mathbb{R}^n)$, где $\mathrm{B}(\mathbb{R}^n)$ – пространство всех ограниченных $\mathcal{B}$-измеримых (измеримых по Борелю) скалярных функций, определенных в $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|f\| = \sup|f(x)|$; $\mu \in \mathrm{V}$, где V – пространство всех счетно-аддитивных числовых функций множества (обобщенных мер – «мер со знаком»; см. [12, с. 328]), определенных на σ-алгебре $\mathcal{B}$ борелевских множеств пространства $\mathbb{R}^n$ (за норму меры μ можно взять полную вариацию на $\mathbb{R}^n$: $\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R}^n)$; см. [12, с. 331]).

Можно показать ([7, с. 37; 11, с. 163]), что семейство операторов $\{\mathrm{H}^t, t \geq 0\}$ образует *однопараметрическую полугруппу ограниченных линейных операторов* на банаховом пространстве $\mathrm{B}(\mathbb{R}^n)$ ($\mathrm{H}^0 = \mathrm{I}d$, $\mathrm{H}^{t+s} = \mathrm{H}^t \cdot \mathrm{H}^s$), причем операторы H^t сжимающие ($\|\mathrm{H}^t f\| \leq \|f\|$) и сохраняющие положительность (переводят неотрицательные функции в неотрицательные).

Для полугруппы $\{\mathrm{H}^t\}$ обычным образом можно определить ее *инфинитезимальный оператор* полугруппы:

$$\mathrm{A}f := \lim_{t \to +0} \frac{\mathrm{H}^t f - f}{t}, \quad f \in \mathrm{B}(\mathbb{R}^n).$$

Иначе говоря, $\mathrm{A}f$ – это правая производная от $\mathrm{H}^t f$ в нуле: $\mathrm{A}f = \left(\frac{d}{dt}\right)_+ (\mathrm{H}^t f)|_{t=0}$.

Заметим, что в отличие от H^t оператор A определен, вообще говоря, *не* на всем пространстве $\mathrm{B}(\mathbb{R}^n)$, а на некотором его подмножестве D_A (где существует указанный выше предел по норме пространства $\mathrm{B}(\mathbb{R}^n)$), причем A не будет ограниченным линейным оператором.

Можно определить также инфинитезимальный оператор марковского процесса с *неоднородной* переходной функцией $\mathrm{P}(s, x, t, \mathrm{A})$. Этот случай можно свести к случаю однородной с помощью расширения фазового пространства $\mathbb{R}^n$: $(s, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$, и заменой $f(x)$ на $f(s, x)$.

Можно доказать, что стохастически непрерывная переходная функция однозначно определяется своим инфинитезимальным оператором.

Инфинитезимальный оператор A полугруппы $\{\mathrm{H}^t, t \geq 0\}$, связанный с марковским процессом $\xi(t, \omega)$, $t \in [0, +\infty)$, называется *инфинитезимальным оператором марковского процесса*.

Отметим очень важный принцип – *принцип максимума*: если функция $f \in \mathrm{D}_\mathrm{A} \subset \mathrm{B}(\mathbb{R}^n)$ и f имеет абсолютный максимум в точке $x \in \mathbb{R}^n$ (то есть $f(x) \geq f(y)$ $\forall y \in \mathbb{R}^n$), то $(\mathrm{A}f)(x) \leq 0$.

Е. Диффузионный процесс. Диффузионные процессы представляют собой специальный класс марковских процессов с непрерывными траекториями. Грубо говоря, диффузионные процессы – это те марковские семейства, инфинитезимальные операторы которых являются дифференциальными операторами и траектории которых непрерывны. Диффузионные процессы служат теоретико-вероятностными моделями физических диффузионных явлений.

Можно показать ([11, с. 208]), что с диффузионным процессом могут быть связаны дифференциальные операторы не выше чем второго порядка, то есть иметь вид:

$$\sum_i b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{ij} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j},$$

причем матрица $(a_{ij}(x))$ должна быть неотрицательно определенной при любом x.

Марковское семейство $(\xi(t,\omega),\mathrm{P}_x)$ на фазовом пространстве $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B})$ ($\mathcal{B}$ – множество всех борелевских множеств $\mathbb{R}^n$) называется диффузионным процессом в $\mathbb{R}^n$, если:

a) его инфинитезимальный оператор определен в классе $\mathrm{C}^2_{фин}$ всех финитных дважды непрерывно дифференцируемых функций (то есть $\mathrm{C}^2_{фин}\subset \mathrm{D}_\mathrm{A}$);

b) существуют непрерывные векторная функция $b(x)=(b_1(x),\dots,b_n(x))$ и матричная функция $a(x)=(a_{ij}(x))_{i,j=1}^n$, симметричная и неотрицательно определенная при любом x (то есть $(a(x)\lambda,\lambda)\ge 0 \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}^n$), такие, что для $f\in \mathrm{C}^2_{фин}$:

$$(\mathrm{A}f)(x)=(\mathcal{L}f)(x)=\sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\equiv\left(b,\frac{\partial}{\partial x}\right)f(x)+\frac{1}{2}\left(a\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right)f(x),$$

где $\frac{\partial}{\partial x}:=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$; $(*,*)$ – скалярное произведение (последнее выражение представляет собой символическую запись предыдущего);

c) все его траектории непрерывны.

Функции $b(x)$ и $a(x)$ называются коэффициентами диффузионного процесса: $b(x)$ называется вектором сноса, $a(x)$ – матрицей диффузии.

Можно определить диффузионный процесс также и с переходной функцией $\mathrm{P}(s,x;t,\mathrm{A})$, зависящей от s (данное выше определение относится к марковским семействам с *однородной* переходной функцией $\mathrm{P}(o,x,t,\mathrm{A})\equiv \mathrm{P}(x,t,\mathrm{A})$). Тогда в дифференциальном выражении $\mathcal{L}f$ функции $b_i(x)$ и $a_{ij}(x)$ заменяются соответственно на $b_i(t,x)$ и $a_{ij}(t,x)$ и добавляется дополнительное слагаемое $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$, а вектором сноса и матрицей диффузии будут $b(t,x)=(b_1(t,x),\dots,b_n(t,x))$ и $a(t,x)=(a_{ij}(t,x))$ соответственно.

Дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ называется производящим оператором диффузионного процесса (или марковского семейства).

F. Решения стохастического уравнения как марковские процессы. Пусть задано стохастическое дифференциальное уравнение Ито (1)

$$dx(t)=b(t,x(t))dt+\sigma(t,x(t))dw(t)$$

на отрезке $[t_0,\mathrm{T}]$. Здесь $x(t)=x(t,\omega)$ и $b(t,x)$ принимают значения из $\mathbb{R}^n$, $\sigma(t,x)$ – $(n\times m)$-матричнозначная функция, $w(t)$ – m-мерный винеровский процесс; начальное значение $x_0=x_0(\omega)$ есть произвольная случайная величина, не зависящая от $w(t)-w(t_0)$ для $t\ge t_0$.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим то же самое уравнение, но теперь на отрезке $[s,\mathrm{T}]$, где $s\in[t_0,\mathrm{T}]$, и с фиксированным начальным значением $x(s,\omega)=x\in\mathbb{R}^n$. Соответствующее интегральное уравнение имеет вид:

$$x(t)=x+\int_s^t b(\tau,x(\tau))\,d\tau+\int_s^t \sigma(\tau,x(\tau))\,dw(\tau),\ t_0\le s\le t\le \mathrm{T}. \qquad (7)$$

Справедлива

Теорема 2.2 ([6, с. 86; 7, с. 146; 13, с. 107–108]). *Пусть коэффициенты* $b(t,x)$, $\sigma(t,x)$ ($t\in[t_0,\mathrm{T}]$, $x\in\mathbb{R}^n$) *стохастического уравнения* (1) *удовлетворяют условиям теоремы* 2.1 *существования и единственности решения. Тогда решение* $x(t)=x(t,\omega)$ *уравнения* (1) *с произвольным начальным значением* $x(s,\omega)=x\in\mathbb{R}^n$ *представляет собой марковский процесс на отрезке* $[t_0,\mathrm{T}]$, *переходная функция которого определяется соотношением*:

$$\mathrm{P}(s,x,t,\mathrm{A})=\mathrm{P}\{\omega{:}x(t,\omega)\in\mathrm{A}\mid x(s,\omega)=x\}=:\mathrm{P}\{\omega{:}x(t;s,x,\omega)\in\mathrm{A}\},$$

где $x(t;s,x,\omega)$ *есть единственное решение интегрального уравнения* (7) *при* $t\ge s$, *удовлетворяющее начальному условию* $x(s;s,x,\omega)=x$.

Если коэффициенты $b(t,x)$ *и* $\sigma(t,x)$ *уравнения* (1) *не зависят от времени* t: $b(t,x)\equiv b(x)$, $\sigma(t,x)\equiv\sigma(x)$, *то переходная функция соответствующего марковского процесса однородна*, *то есть решение есть однородный марковский процесс*.

Поскольку в силу теоремы 2.1 решения стохастического уравнения (1) непрерывны по t, то на основании теоремы 2.2 решения уравнения (1) представляют собой *марковские процессы с непрерывными траекториями*.

G. Решения стохастического уравнения как диффузионные процессы. Возникает вопрос: когда решения стохастического уравнения (1) являются диффузионными процессами? Ясно, что для этого коэффициенты $b(t,x)$ и $\sigma(t,x)$ уравнения (1), определяющие переходную функцию решения – марковского процесса – должны удовлетворять дополнительным условиям. Как должны определяться вектор сноса и матрица диффузии из уравнения (1)?

Имеет место следующая

Теорема 2.3 ([7, с. 153; 10, с. 480]). *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *существования и единственности решения стохастического дифференциального уравнения* (1):

$$dx(t)=b(t,x(t))\,dt+\sigma(t,x(t))\,dw(t),\quad x(t_0)=x,\quad t\in[t_0,\mathrm{T}],$$

где $x(t)=x(t,\omega)\in\mathbb{R}^n$, $b(t,x)\in\mathbb{R}^n$, $\sigma(t,x)\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $w(t)=w(t,\omega)\in\mathbb{R}^m$.

Если, кроме того, функции $b(t,x)$ *и* $\sigma(t,x)$ *непрерывны по* t, *то решение* $x(t)=x(t,\omega)$ *уравнения* (1) *будет* n*-мерным диффузионным процессом на отрезке* $[t_0,\mathrm{T}]$ *с вектором сноса* $b(t,x)$ *и матрицей диффузии* $a(t,x)=\sigma(t,x)\sigma(t,x)^{\mathrm{T}}$ *и, следовательно, с производящим дифференциальным оператором*

$$\mathcal{L}=\frac{\partial}{\partial t}+\left(b,\frac{\partial}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}\left(\sigma\sigma^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

В частности, решение автономного стохастического дифференциального уравнения

$$dx(t)=b(x)\,dt+\sigma(x)\,dw(t)$$

всегда есть однородный диффузионный процесс на $[t_0,+\infty)$ *с* $\mathcal{L}=\left(b,\frac{\partial}{\partial x}\right)+\left(\sigma\sigma^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Замечание 12. Поставим обратный вопрос: если дан диффузионный процесс, то является ли он решением какого-либо стохастического дифференциального уравнения? Другими словами, если $x(t,\omega)$ – n-мерный диффузионный процесс на отрезке $[t_0, \mathrm{T}]$, то существует ли винеровский процесс $w(t)$ такой, что $x(t_0,\omega)$ и $w(t)-w(t_0)$ независимы и функции $b(t,x)$ и $\sigma(t,x)$ такие, что траектории (реализации) $t \to x(t,\omega)$ процесса $x(t,\omega)$ могут быть получены посредством уравнения:

$$dx(t) = b(t,x)\,dt + \sigma(t,x)\,dw(t)$$

из траекторий винеровского процесса $w(t)$?

Ответ на этот вопрос положительный ([7, с. 155–156]). В частности, для однородного диффузионного процесса всегда можно найти автономное стохастическое дифференциальное уравнение как его динамическую модель.

Таким образом, *решения стохастических дифференциальных уравнений и диффузионные процессы* представляют по *существу одни и те же классы процессов*, несмотря на полное различие их определений [7, с. 156].

Н. Стохастический аналог формулы Ньютона-Лейбница. Пусть случайный процесс $\xi(t,x;\omega)$ $(t \in [t_0, \mathrm{T}])$, $\xi(t_0,x;\omega) = x$ со значениями из $\mathbb{R}^n$ имеет стохастический дифференциал Ито

$$d\xi(t) = b(t,\omega)\,dt + \sigma(t,\omega)\,dw(t) \equiv b(t,\omega)\,dt + \sum_{r=1}^{m} \sigma_r(t,\omega)\,dw_r(t),$$

где $b(t) = b(t,\omega) \in \mathbb{R}^n$, $\sigma(t) = \sigma(t,\omega) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\sigma_r(t,\omega)$ – r-й столбец $(n \times m)$-матрицы $\sigma(t,\omega)$, $w(t) = (w_1(t), \dots, w_m(t))$ – m-мерный винеровский процесс. Предположим, что: 1) функция $b(t) = b(t,\omega)$ измерима при каждом $t \in [t_0, \mathrm{T}]$ относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ – σ-алгебра из основного вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$) и при почти всех ω имеет конечный интеграл $\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \|b(t,\omega)\|\,dt$, то есть $b \in \mathcal{L}^1([t_0, \mathrm{T}])$; 2) функция $\sigma(t) = \sigma(t,\omega)$ измерима по совокупности переменных (t,ω), измерима при каждом $t \in [t_0, \mathrm{T}]$ относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_t$ и при почти всех ω конечен интеграл $\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \|\sigma(t,\omega)\|^2\,dt$, то есть $\|\sigma(t,\omega)\| \in \mathcal{L}^2([t_0, \mathrm{T}])$.

Пусть числовая функция $\mathrm{F}(t,x)$ $(t \in [t_0, \mathrm{T}],\ x \in \mathbb{R}^n)$ принадлежит классу $\mathrm{C}^{1,2}$ (то есть имеет непрерывные частные производные до первого порядка по t и до второго порядка по x). Обозначим через $\mathcal{L}$ дифференциальный оператор

$$\mathcal{L} := \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \left(\sigma(t)\sigma(t)^{\mathrm{T}}\right)_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ir}(t)\sigma_{jr}(t)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j},$$

определенный в классе функций $\mathrm{C}^{1,2}$ $([t_0, \mathrm{T}] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$.

Рассмотрим сложную функцию $\eta(t,x;\omega) = \mathrm{F}(t, \xi(t,x;\omega))$. Процесс $\eta(t,x,\omega)$ также имеет стохастический дифференциал Ито.

Применяя формулу Ито (см. п. 2.4.2) к $\mathrm{F}(t,\xi(t,x;\omega))$, имеем:

$$d\mathrm{F}(t, \xi(t,x;\omega)) = \left[\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i} \cdot b_i(t) + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x_i \partial x_j}\sigma_{ir}(t)\sigma_{jr}(t)\right] dt + \sum_{r=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i} \cdot \sigma_{ir}(t)\right) dw_r(t),$$

где производные $\partial F/\partial t$, $\partial F/\partial x_i$, $\partial^2 F/\partial x_i \partial x_j$ берутся в точке $(t, \xi(t, x; \omega))$.

Множитель при dt в квадратных скобках равен $\mathcal{L}F(t, \xi(t, x; \omega))$. Соотношение для стохастических дифференциалов по определению означает, что имеет место интегральное равенство:

$$F(t, \xi(t; x; \omega)) = F(t_0, \xi(t_0, x; \omega)) + \int_{t_0}^{t} \mathcal{L}F(\tau, \xi(\tau, x; \omega))\, d\tau + \sum_{r=1}^{m} \int_{t_0}^{t} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} \sigma_{ir}(t) \right) dw_r(t).$$

Возьмем математическое ожидание от обеих частей равенства. Математическое ожидание от стохастических интегралов Ито по винеровским процессам $w_r(t)$ равно нулю (согласно свойству стохастического интеграла; см. п. 2.3.3). Поэтому с учетом того, что $\xi(t_0, x; \omega) = x$, имеем:

$$MF(t, \xi(t, x; \omega)) = F(t_0, x) + M \int_{t_0}^{t} \mathcal{L}F(\tau, \xi(\tau; x; \omega))d\tau .$$

Изменяя порядок интегрирования (M – тоже есть интеграл по $\omega \in \Omega$), на основании теоремы Фубини, будем иметь:

$$MF(t, \xi(t, x; \omega)) = F(t_0, x) + \int_{t_0}^{t} M\, \mathcal{L}F(\tau, \xi(\tau, x; \omega))d\tau .$$

Введя новое обозначение M_x для математического ожидания M случайного процесса $\eta(t, x; \omega)$: $M_x \eta(t) := M\eta(t, x; \omega)$ (аналогично и для $\mathcal{L}\eta(t, x; \omega)$), получим окончательно:

$$M_x F(t, \xi(t)) - F(t_0, x) = \int_{t_0}^{t} M_x\, \mathcal{L}F(\tau, \xi(\tau))d\tau , \tag{8}$$

где $\xi(t) = \xi(t, x; \omega)$, $\xi(t_0) = x$.

Последняя формула представляет собой *стохастический аналог формулы Ньютона-Лейбница* из классического анализа.

Действительно, в детерминистическом случае $\sigma(t, \omega) \equiv 0$, $b(t, \omega) \equiv b(t)$, $\xi(t, x; \omega) \equiv \xi(t)$ ($\xi(t_0) = x$) – неслучайные функции, и $\mathcal{L}F(\tau, \xi(\tau)) = \frac{d}{d\tau} F(\tau, \xi(\tau))$; тогда равенство (8) превращается в формулу Ньютона-Лейбница для функции $F(t, \xi(t))$:

$$F(t, \xi(t)) - F(t_0, \xi(t_0)) = \int_{t_0}^{t} \frac{d}{d\tau} F(\tau, \xi(\tau))d\tau .$$

Формула (8) есть частный случай более общей формулы Дынкина для так называемых строго марковских процессов $\xi(t, \omega)$ и марковских моментов времени [14, с. 22].

2.5.4. Стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича

Выше в п. 2.5.1 было определено стохастическое дифференциальное уравнение на основе интеграла Ито – стохастическое дифференциальное уравнение Ито. Аналогично можно определить стохастическое дифференциальное уравнение, используя стохастический интеграл в смысле Стратоновича (см. п. 2.3.4): стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича.

Стохастическое дифференциальное уравнение в смысле Стратоновича – это уравнение вида:

$$d^* x(t) = b(t, x(t))dt + \sigma(t, x(t)) \circ dw(t), \quad x(t_0) = x_0(\omega) = x_0, \tag{9}$$

относительно случайной функции $x(t)=x(t,\omega)$, $t\in[t_0,\mathrm{T}]$, $\omega\in\Omega$, интерпретируемое как стохастическое интегральное уравнение

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t}b(\tau,x(\tau))d\tau+\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau,x(\tau))\circ dw(\tau),\quad t\in[t_0,\mathrm{T}] \tag{10}$$

относительно функции $x(t)=x(t,\omega)$. Здесь $x(t,\omega)\in\mathbb{R}^n$, $b(x,t)\in\mathbb{R}^n$, $\sigma(t,x)\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $w(t)=w(t,\ \omega)\in\mathbb{R}^m$. В (9) обозначение $d^*x(t)$ подчеркивает, что имеется в виду стохастический дифференциал в смысле Стратоновича; в (10) в правой части второй интеграл $\int_{t_0}^{t}\sigma\circ dw$ есть стохастический интеграл в смысле Стратоновича. Предполагается, что выполнены условия, обеспечивающие существование интегралов, стоящих в правой части уравнения (6).

Как и в случае уравнения Ито (1) (см. п. 2.5.1), уравнение (9) с начальным условием $x(t_0)=x_0(t,\omega)=x_0$ есть лишь сокращенная, символическая, запись интегрального уравнения (10).

Совершенно аналогично уравнению Ито дается определение *решения* стохастического дифференциального уравнения Стратоновича (9) как случайной функции $\xi(t)=\xi(t,\omega)$, $t\in[t_0,\mathrm{T}]$, со значениями в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющей с вероятностью 1 интегральному уравнению (10), то есть для каждого $t\in[t_0,\mathrm{T}]$ при почти всех $\omega\in\Omega$:

$$\xi(t,\omega)=x_0(\omega)+\int_{t_0}^{t}b(\tau,\xi(\tau,\omega))d\tau+\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau,\xi(\tau,\omega))\circ dw(\tau). \tag{11}$$

Используя формулу, устанавливающую связь между интегралами Ито и Стратоновича, можно определить соответственно и связь между стохастическими дифференциальными уравнениями Ито и Стратоновича. Для этого воспользуемся формулой из п. 2.3.5 [2], выражающей интеграл Стратоновича через интеграл Ито:

$$\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau,x(\tau))\circ dw(\tau)=\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau,x(\tau))dw(\tau)+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\frac{\partial\sigma_r}{\partial x}(\tau,x(\tau))\sigma_r(\tau,x(\tau))dt, \tag{12}$$

где $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)$ – $(n\times m)$-матрица; σ_r ($r=1,\ldots,m$) – n-мерные векторы-столбцы матрицы σ; $\partial\sigma_r/\partial x$ – матрица частных производных Якоби; w – m-мерный винеровский процесс.

Если случайная функция $\xi(t,\omega)$ есть решение уравнения Стратоновича (9), то есть выполняется (с вероятностью 1) равенство (11), то, с учетом (12), будет выполняться (с вероятностью 1) следующее интегральное равенство;

$$\xi(t,\omega)=x_0(\omega)+\int_{t_0}^{t}\left[b(\tau,\xi(\tau,\omega))+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial\sigma_r}{\partial x}(\tau,\xi(\tau,\omega))\sigma_r(\tau,\xi(\tau,\omega))\right]d\tau+\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau,\xi(\tau,\omega))dw(\tau), \tag{13}$$

то есть $\xi(t,\omega)$ по определению будет решением стохастического дифференциального уравнения Ито

$$dx(t)=\left[b(t,x(t))+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial\sigma_r}{\partial x}(t,x(t))\sigma_r(t,x(t))\right]dt+\sigma(t,x(t))dw(t). \tag{14}$$

Обратно, если $\xi(t,\omega)$ есть решение стохастического уравнения Ито (14), то есть выполняется (с вероятностью 1) интегральное равенство (13), то, с учетом (12), будет выполняться (с вероятностью 1) равенство (11), то есть $\xi(t,\omega)$ по определению будет решением стохастического уравнения Стратоновича (9).

Таким образом, *стохастическое дифференциальное уравнение в смысле Стратоновича* (9) *эквивалентно* (в смысле совпадений решений) *стохастическому дифференциальному уравнению Ито* (14).

Аналогично, стохастическое уравнение Ито (1)

$$dx(t) = b\big(t, x(t)\big)dt + \sigma\big(t, x(t)\big)dw(t)$$

эквивалентно стохастическому уравнению Стратоновича:

$$d^* x(t) = \left[b\big(t, x(t)\big) - \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m} \frac{\partial \sigma_r}{\partial x}\big(t, x(t)\big)\sigma_r\big(t, x(t)\big)\right]dt + \sigma\big(t, x(t)\big) \circ dw(t).$$

В частном случае ($n = m = 1$) для скалярных стохастических уравнений Ито и Стратоновича имеем: уравнение Стратоновича

$$d^* x(t) = b\big(t, x(t)\big)dt + \sigma\big(t, x(t)\big) \circ dw(t)$$

эквивалентно уравнению Ито

$$dx(t) = \left[b\big(t, x(t)\big) + \frac{1}{2}\frac{\partial \sigma}{\partial x}\big(t, x(t)\big)\sigma\big(t, x(t)\big)\right]dt + \sigma\big(t, x(t)\big)dw(t),$$

где $x(t) = x(t, \omega)$, $b(t, x)$, $\sigma(t, x)$, $w(t) = w(t, \omega)$ – скалярные (числовые) функции, $t \in [t_0, \mathrm{T}]$, $x \in \mathbb{R}$.

Обратно, уравнение Ито

$$dx(t) = b\big(t, x(t)\big)dt + \sigma\big(t, x(t)\big)dw(t)$$

эквивалентно уравнению Стратоновича

$$d^* x(t) = \left[b\big(t, x(t)\big) - \frac{1}{2}\frac{\partial \sigma}{\partial x}\big(t, x(t)\big)\sigma\big(t, x(t)\big)\right]dt + \sigma\big(t, x(t)\big) \circ dw(t),$$

(где $x(t)$, $b(t, x)$, $\sigma(t, x)$, $w(t)$ – числовые функции, $t \in [t_0, \mathrm{T}]$, $x \in \mathbb{R}$).

Замечание 13. Если матричная функция $\sigma(t, x) = \big(\sigma_1(t, x), \ldots, \sigma_m(t, x)\big)$, где $\sigma_r(t, x)$ – векторы-столбцы, не зависит от x: $\sigma(t, x) \equiv \sigma(t)$, то в (8) интегралы Стратоновича и Ито совпадают, и, следовательно, совпадают интегральные уравнения Ито (2) (см. п. 2.5.1) и Стратоновича (10), и, значит, стохастические дифференциальные уравнения Ито (1) и Стратоновича (9).

Пример 5. Рассмотрим скалярное стохастическое дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = b(t)x(t) + \sigma(t)x(t)\dot{w}(t), \tag{15}$$

где $x(t) = x(t, \omega)$ – неизвестная числовая случайная функция; $a(t)$ и $b(t)$ – неслучайные числовые функции, измеримые и ограниченные на отрезке $[t_0, \mathrm{T}]$; $\dot{w}(t)$ – одномерный гауссовский «белый шум».

Уравнение (15) можно понимать как стохастическое дифференциальное уравнение в смысле Ито

$$dx(t) = b(t)x(t)dt + \sigma(t)x(t)dw(t), \tag{16}$$

так и в смысле Стратоновича

$$d^* x(t) = b(t)x(t)dt + \sigma(t)x(t) \circ dw(t), \tag{17}$$

где $w(t) = w(t, \omega)$ – одномерный винеровский процесс.

Решение уравнения (16) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ есть случайная функция (см. пример 4):

$$x(t) = x_0 \exp\left\{ \int_{t_0}^{t} \left(b(\tau) - \sigma(\tau)^2 / 2 \right) d\tau + \int_{t_0}^{t} \sigma(\tau) dw(\tau) \right\}. \qquad (18)$$

Уравнение Стратоновича (17) эквивалентно уравнению Ито:

$$dx(t) = \left[b(t) + \sigma(t)^2 / 2 \right] x(t) dt + \sigma(t) x(t) dw(t),$$

решением которого является случайная функция

$$y(t) = x_0 \exp\left\{ \int_{t_0}^{t} b(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{t} \sigma(\tau) dw(\tau) \right\}. \qquad (19)$$

В общем, два процесса (18) (Ито) и (19) (Стратонович) имеют различные глобальные свойства. Например, если положить $b(t) \equiv b(= const)$, $\sigma(t) \equiv \sigma(= const)$ и $t_0 = 0$, то при почти всех ω

$$(\text{Ито}) \quad x(t,\omega) = x_0 e^{\left(b - \sigma^2/2\right)t + \sigma w(t,\omega)} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty$$

тогда и только тогда, когда $b < \sigma^2/2$, тогда как при почти всех ω

$$(\text{Стратонович}) \quad y(t,\omega) = x_0 e^{bt + \sigma w(t,\omega)} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty$$

тогда и только тогда, когда $b < 0$. (Здесь при нахождении пределов (при $t \to +\infty$) использовано одно свойство винеровского процесса: при почти всех ω $\lim\limits_{t \to +\infty} w(t,\omega)/t \to 0$.)

Таким образом, два решения (Ито и Стратоновича) имеют принципиально разные свойства. Вопрос состоит в том, какое из этих двух решений дает наилучшее описание изучаемого реального явления.

Продолжение следует.

To be continued.

Примечания

1. Шумафов М.М., Панеш Т.А., Хаваджа М.А. Об устойчивости в целом по вероятности решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, возмущенных белым шумом. I // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер.: Естественно-математические и технические науки. 2021. Вып. 4 (291). С. 11–23. URL: http://vestnik.adygnet.ru
2. Шумафов М.М., Панеш Т.А., Хаваджа М.А. Об устойчивости в целом по вероятности решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, возмущенных белым шумом. II // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер.: Естественно-математические и технические науки. 2022. Вып. 1 (296). С. 11–30. URL: http://vestnik.adygnet.ru.
3. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1982. 612 с.
4. Леваков А.А. Стохастические дифференциальные уравнения. Минск: БГУ, 2009. 231 с.
5. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. Москва: Мир, 2003. 407 с.
6. Mao X. Stochastic Differential Equations and Applications. 2nd ed. Chichester. UK: Horwood Publishing Limited, 2007. 422 p.
7. Arnold L. Stochastic Differential Equations: Theory and Applications. New York: John Wiley and Sons, 1974. 228 p.
8. Friedman A. Stochastic Differential Equations and Applications // Academic Press. 1975. Vol. I. 248 p.
9. Evans L.C. Introduction to Stochastic Differential Equations. Version 1.2. Berkeley Uni-

versity of California, 2002. 139 p.

10.Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. Москва: Наука, 1965. 656 с.

11. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. Москва: Наука, 1975. 320 с.

12. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука, 1972. 496 с.

13. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. Москва: Наука, 1969. 368 с.

14. Кушнер Г.Дж. Стохастическая устойчивость и управление. Москва: Мир, 1967. 200 с.

References

1. Shumafov M.M., Panesh T.A., Havadzha M.A. On the stochastic stability in the large of solutions of the nonlinear second-order differential equations perturbed by white noise. I // Bulletin of the Adyghe State University. Ser.: Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2021. Iss. 4 (291). P. 11–23. URL: http://vestnik.adygnet.ru

2. Shumafov M.M., Panesh T.A., Havadzha M.A. On the stochastic stability in the large of solutions of the nonlinear second-order differential equations perturbed by white noise. II // Bulletin of the Adyghe State University. Ser.: Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2022. Iss. 1 (296). P. 11–30. URL: http://vestnik.adygnet.ru

3. Gikhman I.I., Skorokhod A.V. Stochastic Differential Equations. Berlin; New York: Springer-Verlag, 1972. 354 p.

4. Levakov A.A. Stochastic Differential Equations. Minsk, BGU, 2009. 231 p.

5. Oksendal B. Stochastic Differential Equations. 5 ed. Springer: Berlin, 2007. 332 p.

6. Mao X. Stochastic Differential Equations and Applications. 2nd ed. Chichester. UK: Horwood Publishing Limited, 2007. 422 p.

7. Arnold L. Stochastic Differential Equations: Theory and Applications. New York: John Wiley and Sons, 1974. 228 p.

8. Friedman A. Stochastic Differential Equations and Applications // Academic Press. 1975. Vol. I. 248 p.

9. Evans L.C. Introduction to Stochastic Differential Equations. Version 1.2. Berkeley University of California, 2002. 139 p.

10. Gikhman I.I., Skorokhod A.V. Introduction to the Theory of Random Processes. Philadelphia: Saunders, 1969. 516 p.

11.Ventsel A.D. The theory of stochastic processes. Moscow: Nauka, 1975. 320 p.

12. Kolmogorov A.N. Elements of Theory of Functions and Functional Analysis. Moscow: Nauka, 1972. 496 p.

13. Khasminsky R.Z. Stochastic Stability of Differential Equations. 2nd ed. London; New York: Springer Heidelberg Dordrecht, 2012. 339 p.

14. Kushner H.J. Stochastic Stability and Control // Academic Press. Vol. 33. New York, 1967. 161 p.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 10.05.2022; одобрена после рецензирования 10.06.2022; принята к публикации 11.06.2022.

The article was submitted 10.05.2022; approved after reviewing 10.06.2022; accepted for publication 11.06.2022.