Научная статья
УДК 517.917+514.742.4
ББК 22.161.61+22.151.62
Т 49
DOI: 10.53598/2410-3225-2022-2-301-39-48

Прямые изоклины и вопросы отсутствия замкнутых траекторий полиномиальных векторных полей

(*Рецензирована*)

Вячеслав Бесланович Тлячев[1], Дамир Салихович Ушхо[2]

[1, 2] *Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия*
[1] *tlyachev@adygnet.ru*
[2] *damirubych@mail.ru*

Аннотация. *Представлены теоремы о прямых изоклинах автономных дифференциальных систем на плоскости, правые части которых являются полиномами n-ой степени. Используя свойства прямых изоклин для квадратичной и кубической дифференциальных систем, указаны коэффициентные условия, при которых они не имеют замкнутых траекторий, в частности, предельных циклов, окружающих состояние равновесия* (*типа фокус*) (0,0)*. Приведены примеры таких систем.*

Ключевые слова: *замкнутая траектория, прямая изоклина, квадратичная и кубическая автономные динамические системы на плоскости, предельный цикл, состояние равновесия, фокус*

Original Research Paper

Straight line isoclines and questions of the absence of closed trajectories of polynomial vector fields

Vyacheslav B. Tlyachev[1], Damir S. Ushkho[2]

[1, 2] *Adyghe State University, Maikop, Russia*
[1] *tlyachev@adygnet.ru*
[2] *damirubych@mail.ru*

Abstract. *Some theorems on straight line isoclines of polynomial vector fields of general form are proved. For example, it is shown that if a straight line passes through n equilibrium states of a system, then it is an isocline of this system. Using the properties of straight line isoclines for quadratic and cubic differential systems, coefficient conditions are indicated under which they do not have closed trajectories, in particular, limit cycles surrounding the equilibrium state* (*or focus*) (0,0)*. Examples of such systems are given.*

Keywords: *closed trajectory, straight line isocline, quadratic and cubic autonomous dynamical systems on the plane, limit cycle, state of equality, focus*

Введение

Важной задачей в качественной теории дифференциальных систем на плоскости считается задача о наличии или отсутствии замкнутых траекторий (предельных циклов). В работе [1] сказано, что «по локальным свойствам разбиения фазовой плоскости на траектории ничего нельзя сказать о существовании или отсутствии замкнутой траектории». Более того, в [1] говорится, что встречаются опубликованные журнальные работы, в которых авторы пытаются обосновать универсальный алгоритмизируемый метод поиска предельных циклов для произвольных динамических систем с аналитическими и неаналитическими правыми частями. На безуспешность этих попыток аргументированно указано на страницах 248–252 в [1].

Известно, что исторически впервые условие отсутствия замкнутых траекторий в виде достаточных условий представлено критерием Бендиксона [2]. Другой по значимости – это критерий Дюлака [3], обобщающий критерий Бендиксона.

Другие критерии связаны с более слабым требованием – требованием отсутствия периодических решений динамической системы. Например, к ним можно отнести критерии, связанные со свойствами так называемой «кривой контактов». Наиболее существенные критерии основаны на свойствах особых точек (см. [4] на с. 346).

В качественной теории полиномиальных векторных полей заметную роль играют изоклины, в частности, прямые изоклины. Так, сведения о некоторых применениях прямых изоклин можно найти в работах [5–7]. Авторы работ [8–10], благодаря использованию свойств прямых изоклин, установили важные сведения о поведении траекторий квадратичной системы. В данной работе инструментарий, основанный на теории прямых изоклин, позволяет установить отсутствие замкнутых траекторий у квадратичных и кубических дифференциальных систем определенного вида.

Предварительно дадим необходимые определения и теоремы для полиномиальных систем общего вида.

Под изоклиной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x, y), \end{cases} \tag{1}$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – функции, имеющие непрерывные производные не ниже первого порядка в области $G \subset R^2$, будем понимать кривую $L : L(x, y) = 0$ на фазовой плоскости, удовлетворяющую уравнению

$$Q(x, y) - m\,P(x, y) = 0, \tag{2}$$

где $m - const$.

Кривая $Q(x, y) = 0$ $(P(x, y) = 0)$ удовлетворяет уравнению (2) при $m = 0$ $(m = \infty)$, поэтому называется изоклиной нуля (бесконечности) системы (1).

Если $L -$ изоклина системы (1), то

$$\left(\frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \right)_{(x,y)\in L} \equiv m, \quad m - \text{const}.$$

При этом число m будем называть направлением, индуцированным на изоклине L, и будем обозначать $m(L)$.

Теорема 1. *Если* $L -$ *изоклина системы* (1), *то в результате невырожденного преобразования*

$$\begin{cases} x = \alpha\,\overline{x} + \beta\,\overline{y} + \mu, \\ y = \gamma\,\overline{x} + \delta\,\overline{y} + \nu \end{cases} \tag{3}$$

L *трансформируется в изоклину* $\overline{L}$.

Доказательство. В результате преобразования (3) система (1) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{d\tau} = \delta P(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y} + \mu,\ \gamma\overline{x} + \delta\overline{y} + \nu) - \beta Q(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y} + \mu,\ \gamma\overline{x} + \delta\overline{y} + \nu), \\ \dfrac{d\overline{y}}{d\tau} = -\gamma P(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y} + \mu,\ \gamma\overline{x} + \delta\overline{y} + \nu) + \alpha Q(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y} + \mu,\ \gamma\overline{x} + \delta\overline{y} + \nu), \end{cases} \tag{4}$$

где $d\tau = \dfrac{dt}{\Delta}$, $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Для определенности примем $m(L) = m$. Преобразование (3) переводит кривую L в $\overline{L}$. Тогда

$$\left(\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}}\right)_{(\overline{x},\overline{y})\in\overline{L}} \equiv \frac{-\gamma + \alpha m}{\delta - \beta m} = \overline{m} - \text{const}. \qquad (5)$$

Из равенства (5) получаем, что кривая $\overline{L}$ является изоклиной системы (5).

Теорема доказана.

Следствие. Любую выбранную изоклину системы (1) с помощью линейного преобразования можно перевести в любую из двух главных изоклин.

Действительно, если $\gamma = \alpha m$ $(\delta = \beta m)$, то кривая $\overline{L}$ – изоклина нуля (бесконечности) системы (5).

Теорема 2 ([7]). *Если прямая* l *проходит через* n *состояний равновесия системы*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{n} a_{ij}x^i y^j \equiv P_n(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{n} b_{ij}x^i y^j \equiv Q_n(x,y), \end{cases} \qquad (6)$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in R, (P_n, Q_n) = 1,$ *то* l *– изоклина этой системы.*

Теорема 3. *Точка* M *является состоянием равновесия системы* (1) *тогда и только тогда, когда через эту точку проходят хотя бы две изоклины* L_1 *и* L_2, *на которых индуцированы различные направления.*

Доказательство. Пусть M – состояние равновесия системы (1), тогда по определению [11] M – общая точка главных изоклин. Обратно, пусть через M проходят изоклины L_1 и L_2 такие, что $m(L_1) = m_1$, $m(L_2) = m_2$ $(m_1 \neq m_2)$. Применив к системе (1) преобразование

$$\begin{cases} x = \overline{x} + \overline{y}, \\ y = m_1\overline{x} + m_2\overline{y}, \end{cases} \qquad (7)$$

придадим системе (1) вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{dt} = \overline{P}(\overline{x},\overline{y}), \\ \dfrac{d\overline{y}}{dt} = \overline{Q}(\overline{x},\overline{y}). \end{cases} \qquad (8)$$

Согласно следствию из теоремы 1, изоклина $L_1(L_2)$ системы (1) перешла в изоклину нуля (бесконечности) системы (8). Следовательно, в результате преобразования (7) точка M перешла в точку $\overline{M}$ – общую точку главных изоклин системы (8).

Теорема доказана.

Теорема 4 ([12]). *Какие бы* $n+1$ *прямых изоклин системы* (6) *ни взять, хотя бы на двух из них индуцированы различные направления.*

Теорема 5 ([7]). *Если через состояние равновесия* M *системы* (1) *проходят две изоклины* L_1 *и* L_2 *такие, что* $m(L_1) = m(L_2)$, *то* M *– сложное состояние равновесия этой системы.*

Теорема 6 ([13]). *Если* M *– сложное состояние равновесия системы* (1), *то посредством невырожденного преобразования* (3) *эту систему можно привести к системе*

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{dt} = R(\overline{x}, \overline{y}), \\ \dfrac{d\overline{y}}{dt} = S(\overline{x}, \overline{y}), \end{cases}$$

где выполняется хотя бы одно из условий: $R'_{\overline{x}}(0,0) = R'_{\overline{y}}(0,0) = 0$ *и* $S'_{\overline{x}}(0,0) = S'_{\overline{y}}(0,0) = 0$, *считая* $M \equiv (0,0)$.

Основные результаты

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{2} a_{ij}x^i y^j \equiv P_2(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{2} b_{ij}x^i y^j \equiv Q_2(x,y), \end{cases} \tag{9}$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in R,\ (P_2, Q_2) = 1$.

Пусть система (9) имеет четыре прямых изоклины: l_1, l_2, l_3, l_4. По теореме 4 какие бы три из этих прямых ни взять, на двух прямых индуцированы различные направления. Пусть $m(l_1) = m(l_2) = m_1,\ m(l_3) = m(l_4) = m_2$, причем $l_1 \| l_3,\ l_2 \| l_4$.

Не сужая общности, согласно следствию из теоремы 1, рассмотрим вместо системы (9) систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y - k_1x - b_1)(y - k_2x - b_2) \equiv \overline{P}_2(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = (y - k_1x - b_3)(y - k_2x - b_4) \equiv \overline{Q}_2(x,y), \end{cases} \tag{10}$$

$b_1 \neq b_3,\ b_2 \neq b_4,\ k_1 \neq k_2$.

Следует отметить, что подходящим преобразованием (3) изоклины l_1 и l_2 переведены в изоклины бесконечности $l_1: y - k_1x - b_1 = 0,\ l_2: y - k_2x - b_2 = 0$, а изоклины l_3 и l_4 – в изоклины нуля $l_3: y - k_1x - b_3 = 0,\ l_4: y - k_2x - b_4 = 0$ системы (10).

Система (10) имеет два состояния равновесия $A = l_1 \cap l_4,\ B = l_2 \cap l_3$.

Вычисления показывают, что в точках A и B выполняется неравенство

$$\overline{P}'_{2x}(x,y)\overline{Q}'_{2y}(x,y) - \overline{P}'_{2y}(x,y)\overline{Q}'_{2x}(x,y) \neq 0.$$

Следовательно, точки A и B – простые состояния равновесия системы (10) [11]. По теореме 2 прямая l_5, проходящая через точки A и B, является изоклиной системы (10). Согласно теореме 5: $m(l_5) = m_3,\ m_3 \in R \setminus \{0\}$. Впрочем, как следует из работы [7], система (10) не имеет прямой изоклины, отличной от прямых $l_i\ i = \overline{1,5}$.

Если перенести начало координат системы (10) в точку A, то получим новую систему вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y - k_1x)(y - k_2x - b_2), \\ \dfrac{dy}{dt} = (y - k_2x)(y - k_1x - b_3). \end{cases} \tag{11}$$

Заметим, что в этом случае вид обозначений фазовых переменных, а также коэффициентов в уравнениях прямых для l_2, l_3 сохранен.

В системе (11) $b_2b_3 \neq 0$, так как в противном случае $(0,0)$ – сложное состояние равновесия этой системы (см. теорему 6).

Известно, что состояние равновесия типа «узел» системы (9) не окружает предельный цикл [14]. Поэтому предположим, что $(0,0)$ – фокус системы (11). Тогда выполняются условия [11]:

$$\sigma = b_2k_1 - b_3,\ \Delta = b_2b_3(k_2-k_1) > 0, \quad \sigma^2 - 4\Delta = (b_2k_1+b_3)^2 - 4b_2b_3k_2 < 0.$$

Второе состояние равновесия системы (11) есть точка $N\left(\dfrac{b_3-b_2}{k_2-k_1}, \dfrac{b_3k_2-b_2k_1}{k_2-k_1}\right)$.

Из условия, что прямая l_5 проходит через точки $(0,0)$ и N, находим соотношение:

$$b_3k_2 - b_2k_1 - k_3(b_3-b_2) = 0. \tag{12}$$

Из (12) следует, что $b_2 \neq b_3$, так как в противном случае имеем равенство $k_1 = k_2$, что противоречит условию $k_1 \neq k_2$. Из (12) находим:

$$k_3 = \frac{b_3k_2 - b_2k_1}{b_3-b_2}. \tag{13}$$

Поскольку на изоклине $l_5: y - k_3x = 0$ индуцировано направление $m \in R\setminus\{0\}$, то имеет место равенство:

$$(k_3-k_2)x\left[(k_3-k_1)x - b_3\right] \equiv m(k_3-k_1)x\left[(k_3-k_2)x-b_2\right]. \tag{14}$$

Из (14) следует, что $m=1$.

Заметим, что $k_3 \neq 1$, ибо в противном случае l_5 – инвариантная прямая. Это противоречит тому, что точка $(0,0)$ – фокус.

Ни замкнутая траектория, окружающая фокус $(0,0)$, ни спиралевидная траектория, стремящаяся к фокусу $(0,0)$ при $t\to+\infty$ (или при $t\to-\infty$), не может пересекать ни одну из изоклин $l_2: y-k_2x-b_2=0$ и $l_3: y-k_1x-b_3=0$. Учитывая это, вместо системы (11) рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = \dfrac{y-k_1x}{y-k_1x-b_3} \equiv F(x,y), \\ \dfrac{dy}{d\tau} = \dfrac{y-k_2x}{y-k_2x-b_2} \equiv G(x,y), \end{cases} \tag{15}$$

где $d\tau = (y-k_1x-b_3)(y-k_2x-b_2)dt.$

Траектории систем (11) и (15) совпадают в области предполагаемого расположения замкнутых траекторий, но параметризации на траекториях этих систем, вообще говоря, могут быть различными.

Из (15) следует, что

$$F'_x(x,y) + G'_y(x,y) = \frac{k_1b_3}{(y-k_1x-b_3)^2} - \frac{b_2}{(y-k_2x-b_2)^2}. \tag{16}$$

Если $\operatorname{sgn} k_1b_3 = -\operatorname{sgn} b_2$, то выражение (16) знакопостоянно, и по признаку Бендиксона [11] система (15), а значит, и система (11) не имеет замкнутых траекторий.

В дальнейшем нам понадобится

Лемма 1. *Система дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = W(x,y) \end{cases} \tag{17}$$

не имеет замкнутых траекторий, если $W(x,y)-W(x,-y)\equiv yg(x,y)$, *где* $g(x,y)\neq 0$.

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию

$$H(x,y)=\frac{W(x,y)}{y}+\frac{W(x,-y)}{-y}=\frac{W(x,y)-W(x,-y)}{y}. \qquad (18)$$

Согласно условию леммы, выражение (18) имеет вид:

$$H(x,y)=g(x,y). \qquad (19)$$

Для определенности положим, что $g(x,y)>0$, и вопреки утверждению леммы допустим существование замкнутой траектории L системы (17). Дугу кривой L, расположенную в полуплоскости $y>0$ $(y<0)$, обозначим L^{+} (L^{-}). Дугу, симметричную дуге L^{-} относительно изоклины $y=0$, обозначим $\overline{L}_0$. Абсциссы точек пересечения траектории L с прямой $y=0$ обозначим x_1 и x_2, причем $x_1<x_2$. В силу неравенства $H(x,y)>0$ в полуокрестности $(x_2-\varepsilon_2,x_2)$ точки x_2 дуга $\overline{L}_0$ расположена выше дуги L^{+}, а в полуокрестности $(x_1,x_1+\varepsilon_1)$ точки x_1 – ниже дуги L^{+}. Так как дуги L^{+} и $\overline{L}_0$. непрерывны, то существует, по крайней мере, одна точка пересечения этих дуг, в окрестности которой $g(x,y)\leq 0$.

Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Замечание 1. ε_1 и ε_2 – сколь угодно малые положительные числа.

Применим к системе (11) преобразование

$$\begin{cases} x=\overline{x}+\overline{y}, \\ y=\overline{y}. \end{cases} \qquad (20)$$

В результате система (11) переходит в систему

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{dt}=(b_2k_1-b_3k_2)\overline{x}+(b_3-b_2+b_2k_1-b_3k_2)\overline{y}, \\ \dfrac{d\overline{y}}{dt}=\left[-k_2\overline{x}+(1-k_2)\overline{y}\right]\left[-k_1\overline{x}+(1-k_1)\overline{y}\right]. \end{cases} \qquad (21)$$

Согласно следствию из теоремы 1, прямая изоклина $y-k_3x=0$ системы (11), на которой индуцировано направление $m=1$, с помощью преобразования (20) переведена в изоклину бесконечности системы (21).

Преобразуем систему (21) по формулам:

$$\begin{cases} \tilde{x}=\overline{x}, \\ \tilde{y}=(b_2k_1-b_3k_2)\overline{x}+(b_3-b_2+b_2k_1-b_3k_2)\overline{y}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{x}}{dt}=(b_3-b_2)\tilde{y}, \\ \dfrac{d\tilde{y}}{dt}=-k_3(b_3-b_2)\tilde{y}+\dfrac{1}{1-k_3}\left[(k_3-k_2)\tilde{x}+(1-k_2)\tilde{y}\right]\left[(k_3-k_1)\tilde{x}+(1-k_1)\tilde{y}+b_3k_3-b_3\right]. \end{cases} \qquad (22)$$

Функция (19) применительно к системе (22) имеет вид:

$$H(\tilde{x},\tilde{y})=\frac{2\left[b_2k_1-b_3+(k_1-1)\tilde{x}\right]}{b_3-b_2}. \qquad (23)$$

Выражение (23) обращается в нуль на прямой $\tilde{x}=\dfrac{b_3-b_2k_1}{k_1-1}$. Учитывая соотношение (13), убеждаемся в том, что абсцисса седла системы (22) равна $\tilde{x}=-b_2$.

Пусть $b_2 > 0$ и $\dfrac{b_3 - b_2 k_1}{k_1 - 1} \le -b_2$ или $b_2 < 0$ и $\dfrac{b_3 - b_2 k_1}{k_1 - 1} \ge -b_2$. Тогда выражение (23) знакопостоянно и по лемме 1 система (22) ациклична. Таким образом, справедлива

Теорема 7. *Система* (11) *не имеет замкнутых траекторий*, *в частности*, *предельных циклов*, *окружающих фокус* $(0,0)$, *если выполняется хотя бы одно из условий*:

$$\operatorname{sgn} k_1 b_3 = -\operatorname{sgn} b_2; \tag{24}$$

$$k_2 = 1, b_2 < 0, \frac{b_3 - b_2}{k_1 - 1} \ge 0; \tag{25}$$

$$k_2 = 1, b_2 > 0, \frac{b_3 - b_2}{k_1 - 1} \le 0. \tag{26}$$

Замечание 2. Априори считаются выполненными условия $b_2 b_3 (k_2 - k_1) > 0, (b_2 k_1 + b_3)^2 - 4 b_2 b_3 k_2 < 0$, так как $(0,0)$ – фокус.

Пример 1. Система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y + x)(y - x + 2), \\ \dfrac{dy}{dt} = (y - x)(y + x + 3), \end{cases}$$

имеющая два состояния равновесия: $(0,0)$ – простой неустойчивый фокус и седло $(-0{,}5;-2{,}5)$, удовлетворяет условию (25) и поэтому ациклична.

Пример 2. Система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y + 2x)(y - x - 1), \\ \dfrac{dy}{dt} = (y - x)(y + 2x - 3) \end{cases}$$

имеет простой устойчивый фокус $(0,0)$ и седло $\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{5}{3}\right)$, удовлетворяет условию (26), поэтому она ациклична.

Пример 3. Условию (24) теоремы 7 удовлетворяет система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y - 2x)(y + 2x + 4), \\ \dfrac{dy}{dt} = (y + 2x)(y - 2x - 2), \end{cases}$$

имеющая простой устойчивый фокус $(0,0)$ и седло $\left(\dfrac{-3}{2}; -1\right)$. Поэтому эта система ациклична.

Замечание 3. Существуют системы (11), имеющие предельный цикл, окружающий фокус.

Пример 4. Система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y - x)(y - 3x + 4 + \varepsilon), \\ \dfrac{dy}{dt} = (y - 3x)(y - x + 4) \end{cases}$$

при $\varepsilon = 0$ в точке $(0,0)$ имеет сложный однократный неустойчивый фокус, так как

$\alpha_3 > 0$ [15]. Если перейти к сколь угодно малым значениям $\varepsilon > 0$, то точка $(0,0)$ обращается в простой устойчивый фокус, окруженный неустойчивым предельным циклом.

Далее рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (y - k_1 x)(a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2) + y - k_2 x, \\ \dfrac{dy}{dt} = (y - k_1 x)(a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2), \end{cases} \tag{27}$$

где $k_1 \neq k_2$. Система (27) имеет две прямее изоклины $n_1 : y - k_1 x = 0,\ n_2 : y - k_2 x = 0$. На прямой n_2 индуцировано направление $m(n_2) = 1$. Поэтому преобразование (20) переводит эту прямую в изоклину бесконечности системы

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{dt} = -k_2 \overline{x} + (1 - k_2)\overline{y}, \\ \dfrac{d\overline{y}}{dt} = \left[-k_1 \overline{x} + (1 - k_1)\overline{y}\right] \overline{F}_2(\overline{x}, \overline{y}),\ k_2 \neq 1. \end{cases} \tag{28}$$

Заметим, что при $k_2 = 1$ прямая n_2 является инвариантной, и система (28) ациклична. Посредством преобразования

$$\begin{cases} \widetilde{x} = \overline{x}, \\ \widetilde{y} = -k_2 \overline{x} + (1 - k_2)\overline{y} \end{cases}$$

система (28) приводится к системе:

$$\begin{cases} \dfrac{d\widetilde{x}}{dt} = \widetilde{y}, \\ \dfrac{d\widetilde{y}}{dt} = -k_2 \widetilde{y} + \left[(k_2 - k_1)\widetilde{x} + (1 - k_1)\widetilde{y}\right] \widetilde{F}_2(\widetilde{x}, \widetilde{y}), \end{cases} \tag{29}$$

где $\widetilde{F}_2(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ – многочлен второй степени.

Таким образом, имеет место

Лемма 2. Посредством аффинного преобразования переменных x и y система (27) может быть приведена к системе

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \alpha y + (y - kx) F_2(x, y), \end{cases} \tag{30}$$

где $F_2(x, y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$.

В системе (30) будем считать выполненным неравенство $b^2 - 4ad < 0$, гарантирующее единственность состояния равновесия $(0,0)$ этой системы. На прямой изоклине $y - kx = 0$ индуцировано направление α, поэтому требуем выполнения неравенства $k \neq \alpha$, так как в противном случае эта прямая будет инвариантной, и система ациклична. Начало координат $(0,0)$ системы (30) будет антиседлом, если $ak > 0$. Под антиседлом следует понимать простое состояние равновесия, не являющееся седлом.

Непосредственными вычислениями убеждаемся в том, что функция (19) применительно к системе (30) имеет вид

$$H(x, y) = 2\left[\alpha + a + (b - kc)x + (d - ke)x^2 + fy^2\right]. \tag{31}$$

Если $b = kc$, $\operatorname{sgn}(\alpha + a) = \operatorname{sgn}(d - ke) = \operatorname{sgn} f$, то выражение (31) знакопостоянно, и по лемме 1 система (30) не имеет замкнутых траекторий.

Тем самым доказана

Теорема 8. *Система дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \alpha y + (y - kx)(a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2) \end{cases}$$

не имеет замкнутых траекторий, окружающих единственное состояние равновесия $(0,0)$, если $b^2 - 4ad < 0,\ ak > 0,\ b = kc,\ \operatorname{sgn}(\alpha + a) = \operatorname{sgn}(d - ke) = \operatorname{sgn} f$.

Пример 5. Система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y + (y - 3x)(4 + 3x + y + 5x^2 + xy + y^2) \end{cases}$$

удовлетворяет условиям теоремы 8: $\alpha = 2,\ k = 3,\ a = 4,\ b = 3,\ c = 1,\ d = 5,\ e = f = 1$. В начале координат данная система имеет простой неустойчивый фокус, а система ациклична.

Замечание 4. Теорема 8 остается справедливой, если равенство

$$\operatorname{sgn}(\alpha + a) = \operatorname{sgn}(d - ke) = \operatorname{sgn} f$$

заменить условием $\alpha + a = 0,\ \operatorname{sgn}(d - ke) = \operatorname{sgn} f$.

Различие лишь в том, что тогда в условиях теоремы 8 точка $(0,0)$ – простой фокус, а при условии $\alpha + a = 0$ точка $(0,0)$ – негрубый фокус.

Примечания

1. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. Москва: Наука, 1976. 496 с.

2. Bendixson I. Sur les courbes définies par des équations différentielles // Acta Mathematica. 1901. Vol. 24, No. 1. P. 1–88.

3. Dulac M.H. Recherche des cycles limites // Comptes Rendus Hebdomadaires des Seances de L'Académie des Sciences. Ser. I: Mathematics. 1937. Vol. 204, No. 23. P. 1703–1706. URL: https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k31562/f3.item

4. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. 2-е изд., перераб. и испр. Москва: Наука, 1981. 918 с.

5. Тлячев В.Б., Ушхо А.Д., Ушхо Д.С. Качественное исследование полиномиальных дифференциальных систем и некоторые приложения теории прямых изоклин // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер.: Естественно-математические и технические науки. 2009. Вып. 1 (43). С. 26–32. URL: http://vestnik.adygnet.ru

6. Тлячев В.Б., Ушхо А.Д., Ушхо Д.С. К вопросу о прямых изоклинах полиномиальных дифференциальных систем на плоскости // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2010. № 1. С. 156–162.

7. Ушхо Д.С. Прямые изоклины и канонические формы полиномиальных дифференциальных систем на плоскости. Майкоп: Изд-во АГУ, 2007. 93 с.

8. Берлинский А.Н. О поведении интегральных кривых одного дифференциального уравнения // Известия высших учебных заведений. 1960. № 2 (15). С. 3–18.

9. Тун-Цзинь-чжу. Расположение предельных циклов системы $dx/dt = X_2(x,y),\ dy/dt = Y_2(x,y)$ // Периодический сборник переводов иностранных статей. Математика. 1962. Т. 6, № 6. С. 150–168.

10. Шахова Л.В. О прямых изоклинах // Труды Самаркандского государственного университета им. Алишера Навои. Самарканд: Изд-во гос. ун-та, 1964. Вып. 144. С. 93–105.

11. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. Москва: Наука, 1966. 568 с.

12. Тлячев В.Б., Ушхо А.Д., Ушхо Д.С. О прямых изоклинах векторных полей на плоскости // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2014. № 2 (1). С. 148–156.

13. Тлячев В.Б., Ушхо А.Д., Ушхо Д.С. Состояния равновесия и смежные вопросы теории плоских полиномиальных векторных полей // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2020. № 1. С. 30–54.
14. Воробьев А.П. К вопросу о циклах вокруг особой точки типа «узел» // ДАН БССР. 1960. Т. 4, № 9. С. 369–371.
15. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. Москва: Наука, 1967. 488 с.

References

1. Bautin N.N., Leontovich E.A. Methods and techniques of the qualitative study of dynamical systems on the plane. Moscow: Nauka, 1976. 496 p.
2. Bendixson I. Sur les courbes définies par des équations différentielles // Acta Mathematica. 1901. Vol. 24, No. 1. P. 1–88.
3. Dulac M.H. Recherche des cycles limites // Comptes Rendus Hebdomadaires des Seances de L'Académie des Sciences. Ser. I: Mathematics. 1937. Vol. 204, No. 23. P. 1703–1706. URL: https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k31562/f3.item
4. Andronov A.A., Vitt A.A., Khaykin S.E. Theory of oscillations. 2nd ed., revised and corrected. Moscow: Nauka, 1981. 918 p.
5. Tlyachev V.B., Ushkho A.D., Ushkho D.S. Qualitative research of polynomial differential systems and some applications of the straight isoclines theory // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser.: Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2009. Iss. 1 (43). P. 26–32. URL: http://vestnik.adygnet.ru
6. Tlyachev V.B., Ushkho A.D., Ushkho D.S. On the question of straight isoclines of polynomial differential systems on the plane // The Bulletin of Nizhny Novgorod University of N.I. Lobachevsky. 2010. No. 1. P. 156–162.
7. Ushkho D.S. Straight isoclines and canonical forms of polynomial differential systems on the plane. Maikop: ASU Publishing House, 2007. 93 p.
8. Berlinsky A.N. On the behavior of integral curves of one differential equation // News of Higher Schools. 1960. No. 2 (15). P. 3–18.
9. Tung Chin-Chu. Positions of limit-cycles of the system $dx/dt = X_2(x,y)$, $dy/dt = Y_2(x,y)$ // The periodic collection of translations of foreign articles. Mathematics. 1962. Vol. 6, No. 2. P. 150–168; Sci. Sinica, 1959. Vol. 8, No. 2. P. 151–171.
10. Shakhova L.V. About straight isoclines // Proceedings of Samarkand State University of Alisher Navoi. Samarkand: the State University Publishing House, 1964. Iss. 144. P. 93–105.
11. Qualitative theory of second-order dynamical systems / A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon, A.G. Maier. New York: John Wiley and Sons, 1973. 568 p.
12. Tlyachev V.B., Ushkho A.D., Ushkho D.S. On straight-line isoclines of planar vector fields // Bulletin of Nizhny Novgorod University of N.I. Lobachevsky. 2014. No. 2 (1). P. 148–156.
13. Tlyachev V.B., Ushkho A.D., Ushkho D.S. Equilibrium states and adjacent questions of the plane polynomial vector fields theory // Differential Equations and Control Processes. 2020. No. 1. P. 30–54.
14. Vorobyev A.P. On the issue of cycles around a singular point of the "knot" type // DAN BSSR. 1960. Vol. 4, No. 9. P. 369–371.
15. Bifurcation theory of dynamical systems on the plane / A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon, A.G. Mayer. Moscow: Nauka, 1967. 488 p.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 11.04.2022; одобрена после рецензирования 10.05.2022; принята к публикации 11.05.2022.

The article was submitted 11.04.2022; approved after reviewing 10.05.2022; accepted for publication 11.05.2022.