МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья
УДК 517.95
ББК 22.161.62
Ш 96
DOI: 10.53598/2410-3225-2022-3-306-11-33

Об устойчивости в целом по вероятности решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, возмущенных белым шумом. IV*

(*Рецензирована*)

Магомет Мишаустович Шумафов[1], Тимур Аскербиевич Панеш[2], Мухаммед Ареф Хаваджа[3]

[1, 2] *Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия*
[1] *magomet_shumaf@mail.ru*
[2] *tpanesh@yandex.ru*
[3] *nblm600@gmail.com*

Аннотация. *Настоящая статья является продолжением предыдущей статьи и представляет собой четвертую часть работы авторов. В работе рассматриваются нелинейные автономные дифференциальные уравнения второго порядка, возмущенные гауссовским белым шумом. В первых четырех частях работы приводятся предварительные сведения из теории вероятностей, теории случайных процессов, теории стохастических дифференциальных уравнений и теории устойчивости стохастических уравнений. В четвертой части представлены основные определения стохастической устойчивости, дается понятие о функциях Ляпунова для стохастических систем дифференциальных уравнений, и формулируются основные теоремы из теории устойчивости стохастических дифференциальных уравнений. В работе получены новые достаточные условия асимптотической устойчивости по вероятности решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений Ито второго порядка. Даны вероятностные оценки пребывания случайной траектории в ограниченной области фазовой плоскости. В качестве примера рассматривается гармонический осциллятор, возмущенный белым шумом.*

Ключевые слова: *случайный процесс, винеровский процесс, стохастическое дифференциальное уравнение, стохастическая устойчивость, асимптотическая устойчивость в целом по вероятности, функция Ляпунова, производящий дифференциальный оператор*

Original Research Paper

On the stochastic stability in the large of solutions of the nonlinear second-order differential equations perturbed by white noise. IV

Magomet M. Shumafov[1], Timur A. Panesh[2], Muhammed A. Havadja[3]

[1, 2] *Adyghe State University, Maikop, Russia*
[1] *magomet_shumaf@mail.ru*
[2] *tpanesh@yandex.ru*
[3] *nblm600@gmail.com*

Abstract. *This paper is a continuation of the previous paper and presents the fourth part of the authors' work. In the work, nonlinear autonomous second-order differential equations with random right-hand sides of the type of white noise are considered. In the first four parts of the work, we pre-*

* *Продолжение.* №№ 4 (291) 2021 [1], 1 (296) 2022 [2], 2 (301) 2022 [3].

sent some mathematical preliminaries from probability theory, stochastic processes, theory of stochastic differential equations and stability theory of stochastic equations. In the fourth part, we give the basic definitions of stochastic stability, the notion of Lyapunov's functions for the systems of stochastic differential equations, and basic theorems from the stability theory of stochastic differential equations are formulated. In the work, new sufficient conditions for stochastic asymptotic stability of solutions of the nonlinear second-order Ito's stochastic differential equations are obtained. The probabilistic estimations of the remaining of a random trajectory in a bounded region of the phase plane are given. As an example, harmonic oscillator perturbed by white noise random process is considered.

Keywords: *stochastic process, Wiener process, stochastic differential equation, stochastic stability, stochastic asymptotic stability in the large, Lyapunov function, generated differential operator*

Настоящая статья является продолжением предыдущих статей [1–3]. В [1] для удобства читателя были приведены предварительные сведения из стохастического анализа, а в [2] приведены полные конструкции стохастических интегралов Ито и Стратоновича, на основе которых в статье [3] дано определение решения соответствующих стохастических дифференциальных уравнений. В данной статье даются основные определения устойчивости в вероятностном смысле и формулируются основные теоремы из стохастической теории устойчивости. Далее дается понятие о функциях Ляпунова для стохастических дифференциальных уравнений. В работе получены новые достаточные условия асимптотической устойчивости по вероятности решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений второго порядка. Даны вероятностные оценки пребывания случайной траектории в ограниченной области фазовой плоскости. В качестве примера рассматривается стохастический гармонический осциллятор.

Обстоятельное изложение стохастической теории устойчивости можно найти в книгах [4; 5; 6, гл. 11; 7, гл. 4; 8, ч. 1, гл. 4, ч. 2, гл. 3]. Ниже во всей работе мы сохраняем общую нумерацию пунктов и продолжаем ее.

2.6. Устойчивость стохастических дифференциальных уравнений

В 1892 году в своих знаменитых мемуарах [9] А.М. Ляпунов дал строгое определение понятий теории устойчивости, доказал основополагающие теоремы, предложил два основных метода исследования устойчивости решений (движений) детерминированных дифференциальных уравнений, из них второй метод, или, как принято сейчас называть его, прямой метод или метод функций Ляпунова, получил наибольшее распространение благодаря своей чрезвычайной общности и эффективности. После А.М. Ляпунова теория устойчивости движения развивалась по различным направлениям и получила дальнейшее развитие в работах многочисленных исследователей. Грубо говоря, устойчивость означает чувствительность состояния системы по отношению к малым изменениям начального состояния или параметров системы. Если система устойчива, то ее траектории, близкие друг другу в некоторый момент времени, должны оставаться близкими друг другу и в последующие моменты времени. Теория устойчивости детерминированных систем и ее развитие обстоятельно изложена во многих книгах (см., например, [9–19]).

2.6.1. Дифференциальный оператор, связанный со стохастическим дифференциальным уравнением

Теория устойчивости Ляпунова была перенесена на стохастический случай в работах Кушнера и Хасьминского и многих авторов (см. монографии [4, 5] и библиографию в них). Впоследствии стохастический аналог второго метода Ляпунова получил развитие в работах Якубовича и Левита [20, 21], Пакшина [22, 23], Пакшина и Угриновского [24], Кореневского [25], Л. Арнольда и Шмалфусса [26], Л. Арнольда [6], Фридмана [27], Оксендаля [28], Левакова [29], Мао [7, 30, 31] (см. также библиографию в [6, 7, 27–29]).

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито

$$dx(t) = b(t,x)\,dt + \sigma(t,x)\,dw(t), \quad x(t_0) = x_0(\omega), \quad t \ge t_0, \tag{*}$$

где $w(t)$ – m-мерный винеровский процесс, $b(t,x)$ – n-мерная векторная функция и $\sigma(t,x)$ – $(n\times m)$-значная матричная функция, заданные в области $[t_0,+\infty)\times\mathbb{R}^n$ $\left(t\in[t_0,+\infty),\ x\in\mathbb{R}^n\right)$.

Предположим, что функции $b(t,x)$ и $\sigma(t,x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы существования и единственности глобального решения, удовлетворяющего начальному условию $x(t_0) = x_0(\omega)$, то есть решения, определенного на всем бесконечном промежутке $[t_0,+\infty)$ (см. п. 2.5.2 из [3]). Это решение представляет собой диффузионный процесс с вектором сноса $b(t,x)$ и матрицей диффузии $a(t,x) = \sigma(t,x)\sigma(t,x)^{\mathrm{T}}$.

Допустим, что начальное значение (случайная величина) $x_0(\omega)\in L^2(\Omega,\ \mathbb{R}^n)$ является константой с вероятностью 1: $x_0(\omega) = x_0(=const)$ при почти всех $\omega\in\Omega$. Тогда можно доказать (см., например, [27, с. 179]), что существуют все моменты $\mathrm{M}\|x(t)\|^p$ для $p>0$ и $\mathrm{P}\left(x(t)\in\mathrm{B}\,|\,x(t_0)=x_0\right) = \mathrm{P}\left(x(t;\ t_0,x_0)\in\mathrm{B}\right)$ (здесь $\|\cdot\|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$).

Глобальное решение, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$, обозначим через $x(t,\omega;\ t_0,x_0)$ или просто $x(t;\ t_0,x_0)$. В силу свойств решений уравнения (1) $x(t;\ t_0,x_0)$ имеет непрерывные траектории $t\to x(t;\ t_0,x_0)$ и ее моменты $\mathrm{M}\|x(t;\ t_0,x_0)\|^p$ $(p>0)$ конечны. Допустим далее, что

$$b(t,0)\equiv 0, \quad \sigma(t,0)\equiv 0 \quad \text{на} \quad [t_0,+\infty),$$

так что $x(t;\ t_0,x_0)\equiv 0$ является тривиальным (нулевым) решением стохастического дифференциального уравнения (1) с начальным условием $x(t_0;\ t_0,0) = 0$.

Уравнение (*) можно переписать в виде

$$dx(t) = b(t,x)\,dt + \sum_{r=1}^{m}\sigma_r(t,x)\,dw_r(t), \tag{1}$$

где $\sigma_r(t,x)$ – r-й вектор-столбец матрицы $\sigma(t,x)$, а $w_r(t)$ – r-я координата векторного винеровского процесса $w(t)$ (по определению, $w_r(t)$ $(r=1,\dots,m)$ – независимые одномерные винеровские процессы).

Обозначим через L расширение инфинитезимального оператора **Б** процесса $x(t;\ t_0,x_0)$ до всех функций класса $C^{1,2}\left([t_0,+\infty)\times\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}\right)$, то есть непрерывно дифференцируемых по t и дважды непрерывно дифференцируемых по координатам x_i $(i=1,\dots,n)$ вектора $x=(x_1,\dots,x_n)$:

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sigma(t,x)\sigma(t,x)^{\mathrm{T}}\right)_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}, \tag{2}$$

где $b_i(t,x)$ – координаты векторной функции $b(t,x)$, а $\left(\sigma(t,x)\sigma(t,x)^{\mathrm{T}}\right)_{ij}$ – элементы матрицы диффузии $a(t,x)=\sigma(t,x)\sigma(t,x)^{\mathrm{T}}$.

(В пункте 2.5.3 (E) из [3] мы определяли производящий дифференциальный оператор L диффузионного процесса $x(t;\ t_0,x_0)$ как оператор, определенный на финитных (то есть равных нулю вне некоторого компакта) дважды дифференцируемых функциях $f(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$: $(\mathrm{A}f)(x)=(Lf)(x)$. Здесь мы расширяем область определения дифференциального оператора L до класса функций $C^{1,2}$.)

Если функция $\mathrm{V}\in C^{1,2}\left(\left[t_0,+\infty\right)\times\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}\right)$, то

$$L\mathrm{V}(t,x)=\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial t}(t,x)+\sum_{i=1}^{n}b_i(t,x)\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial x_i}(t,x)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sigma(t,x)\sigma(t,x)^{\mathrm{T}}\right)_{ij}\frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial x_i\partial x_j}(t,x)\equiv$$

$$\equiv\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial t}+\left(b,\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathrm{V}+\frac{1}{2}\left(\sigma\sigma^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathrm{V}. \qquad (3)$$

Последнее выражение есть символическая запись предыдущего: здесь $b=b(t,x)$, $\sigma_r=\sigma_r(t,x)$, $\frac{\partial}{\partial x}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение, T – транспонирование. Его можно записать символически и через столбцы σ_r матрицы σ:

$$L\mathrm{V}=\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial t}+\left(b,\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathrm{V}+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\left(\sigma_r,\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\mathrm{V}.$$

Здесь использовано символическое равенство $\left(\sigma\sigma^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum_{r=1}^{m}\left(\sigma_r,\frac{\partial}{\partial x}\right)^2$.

Замечание 1. В детерминистическом случае $\sigma(t,x)\equiv 0$ оператор L переходит в оператор Ляпунова $\partial/\partial t+\left(b,\partial/\partial x\right)$, а $L\mathrm{V}=\dot{\mathrm{V}}$ – «производная функции V в силу системы».

2.6.2. Функции Ляпунова

Пусть $x(t)=x(t,\omega\ ;\ t_0,x_0)$ – решение уравнения (1) и $\mathrm{V}(t,x)$ – *положительно-определенная функция*, определенная на $\left[t_0,+\infty\right)\times\mathbb{R}^n$, то есть $\mathrm{V}(t,0)\equiv 0$ и существует непрерывная положительно определенная функция $\mathrm{W}(x)$: $\mathrm{W}(0)=0$, $\mathrm{W}(x)>0$ для всех $x\neq 0$, такая, что $\mathrm{V}(t,x)\geq\mathrm{W}(x)$ для всех $t\geq t_0$. Пусть $\mathrm{V}\in C^{1,2}\left(\left[t_0,+\infty\right)\times\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}_+\right)$, $\mathbb{R}_+:=\left[0,+\infty\right)$. Тогда сложная функция (случайный процесс) $\mathrm{V}(t,x(t))$ имеет, согласно утверждению 3 из [3] (п. 2.4.2, формула Ито), стохастический дифференциал Ито

$$d\mathrm{V}(t,x(t))=\left[\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial t}(t,x(t))+\left(\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial x}(t,x(t)),b(t,x(t))\right)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial x_i\partial x_j}(t,x(t))\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{r=1}^{m}\sigma_{ri}(t,x(t))\sigma_{rj}(t,x(t))\right]dt+\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial x}(t,x(t)),\sigma_r(t,x(t))\right)dw_r(t),$$

где $\partial \mathrm{V}/\partial x = \left(\partial \mathrm{V}/\partial x_1, ..., \partial \mathrm{V}/\partial x_n \right)$ – градиент по x функции V, σ_{ri}, σ_{rj} – i-я и j-я координаты вектора-столбца σ_r матрицы σ соответственно.

Так как

$$\sum_{r=1}^{m} \sigma_{ri}\sigma_{rj} = \left(\sigma\sigma^{\mathrm{T}}\right)_{ij},$$

то

$$d\mathrm{V}\left(t, x(t)\right) = \left[\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} + \left(b, \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x_i \partial x_j} \left(\sigma\sigma^{\mathrm{T}}\right)_{ij} \right] dt + \sum_{i=1}^{m} \left(\sigma_r, \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} \right) dw_r(t),$$

где функции b, $\partial \mathrm{V}/\partial x$, $\partial^2 \mathrm{V}/\partial x_i \partial x_j$, σ, σ^{T}, σ_r берутся в точке $\left(t, x(t)\right)$.

Поскольку выражение в квадратных скобках в силу (3) есть $L\mathrm{V}\left(t, x(t)\right)$, то получаем:

$$d\mathrm{V}\left(t, x(t)\right) = L\mathrm{V}\left(t, x(t)\right) + \sum_{r=1}^{m} \left(\sigma_r\left(t, x(t)\right), \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\left(t, x(t)\right) \right) dw_r(t). \qquad (4)$$

Для исследования устойчивости решений детерминистических систем вида $\dot{x} = b(t, x)$, $t \ge t_0$, $x \in \mathbb{R}^n$, А.М. Ляпунов предложил *метод* (называемый *прямым методом* или *вторым методом*), основанный на рассмотрении специального класса функций, – положительно определенные скалярные функции $V(t, x)$, обладающие следующими свойствами:

a) $V \in C^{1,2}\left(\left[t_0, +\infty\right) \times S_h, \mathbb{R}_+\right)$, где $S_h = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < h \right\}$;

b) $V(t, x)$ – положительно определена: $\mathrm{v}(t, 0) \equiv 0$ и $\mathrm{v}(t, x) \ge w(x) > 0$ при $\|x\| \ne 0$, $w(0) = 0$;

c) $\dot{V}(t, x) \le 0$ в области $\left[t_0, +\infty\right) \times S_h$,

где $\dot{V}(t, x) = \dfrac{\partial V}{dt}(t, x) + \left(\dfrac{\partial V}{dx}(t, x), b(t, x) \right)$ – производная функции $V(t, x)$ в силу системы $\dot{x} = b(t, x)$.

В иных случаях на $V(t, x)$ налагают еще некоторые дополнительные условия, например, вместо условия c) рассматривают условие отрицательной определенности:

c') $V(t, x) < -W(x) < 0$ при $\| x \| \ne 0$, $V(t, 0) = W(0) = 0$.

Функция $V(t, x)$, удовлетворяющая условиям a)–c) или a)–c'), называется *функцией Ляпунова* для системы $\dot{x} = b(t, x)$.

Если для системы $\dot{x} = b(t, x)$ существует функция Ляпунова, то тривиальное (нулевое) решение $x(t) \equiv 0$ $(t_0 \le t < +\infty)$ устойчиво (по Ляпунову).

Если вместо условия c) выполняется условие c'), то тривиальное решение асимптотически устойчиво.

Метод функций Ляпунова в модифицированном виде переносится [4, 5] и на стохастический случай – на системы вида (1). При этом вместо оператора Ляпунова – $\partial/\partial t + \left(b, \partial/\partial x\right)$ – производной в силу системы $\dot{x} = b(t, x)$ – рассматривается производя-

щий дифференциальный оператор L, определенный формулой (2).

Интуитивно представляется возможным потребовать выполнение неравенства $d\mathrm{V}\left(t,x(t)\right)\le 0$ для каждой траектории $t\to x\left(t,\omega\,;\,t_0,x_0\right)$, $\omega\in\Omega$, устойчивой стохастической системы, где $d\mathrm{V}\left(t,x(t)\right)$ определяется равенством (4). (Неравенство $d\mathrm{V}\left(t,x(t)\right)\le 0$ необходимо, чтобы $\mathrm{V}\left(t,x(t)\right)$ не возрастала.) Однако из-за присутствия флуктуационного члена в (4) условие $d\mathrm{V}\left(t,x(t)\right)\le 0$ может быть выполнено только в вырожденных случаях [27, с. 180]. Поэтому имеет смысл потребовать вместо неравенства $d\mathrm{V}\left(t,x(t)\right)\le 0$ выполнение «неравенства в среднем», то есть

$$\mathrm{M}\left(d\mathrm{V}\left(t,x\left(t,\omega\,;\,t_0,x_0\right)\right)\right)\le 0\,.$$

Поскольку в силу свойства винеровского процесса $\mathrm{M}w_r\left(t,\omega\right)=0$, то из (4) имеем:

$$\mathrm{M}\left(d\mathrm{V}\left(t,x\left(t,\omega\,;\,t_0,x_0\right)\right)\right)=\mathrm{M}L\mathrm{V}\left(t,x\left(t,\omega\,;\,t_0,x_0\right)\right).$$

Последнее равенство будет выполнено, если

$$L\mathrm{V}\left(t,x\right)\le 0 \text{ для всех } t\ge t_0,\quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{5}$$

Неравенство (5) есть *стохастический аналог* неравенства $\dot{V}\left(t,x\right)\le 0$ в детерминистическом случае, когда $\sigma\left(t,x\right)\equiv 0$.

Положительно определенную функцию $\mathrm{V}\in C^{1,2}\left(\left[t_0,+\infty\right)\times\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}_+\right)$, удовлетворяющую неравенству (5), называют обычно стохастической функцией Ляпунова или функцией Ляпунова для стохастического дифференциального уравнения (1).

2.6.3. Определения стохастической устойчивости

Пусть задано стохастическое дифференциальное уравнение (1). Пусть выполнены сделанные выше в п. 2.6.1 предположения. Дадим определения стохастической устойчивости тривиального (нулевого) решения $x(t)\equiv 0$ уравнения (1). Поскольку исследование устойчивости ненулевого решения можно свести к исследованию устойчивости нулевого решения $x(t)\equiv 0$ введением новых переменных, равным отклонениям соответствующих координат «возмущенного» движения от «невозмущенного», то ограничимся определениями стохастической устойчивости нулевого решения. Определения устойчивости ненулевого решения $x(t)=x\left(t;\,t_0,x_0\right)$ будут аналогичными.

Уже в детерминированном случае существует большое разнообразие определений понятия устойчивости, понимаемых в различных смыслах. А в стохастическом случае их еще больше. Мы ограничимся теми, которые чаще используются в литературе. Все приводимые ниже определения устойчивости тривиального решения стохастической системы (1) с точностью до обозначений имеются в монографиях Хасьминского [4] и/или Кушнера [5].

Определение 1 [4, с. 206]**.** Нулевое решение $x\left(t,\omega\right)\equiv 0$ (или положение равновесия $x=0$) уравнения (1) называется устойчивым по вероятности (стохастически устойчивым), если для любого $t_0\ge 0$ и любого $r>0$

$$\lim_{x_0\to 0}\mathrm{P}\left\{\omega:\sup_{t\ge t_0}\left\|x\left(t,\omega;\,t_0,x_0\right)\right\|>r\right\}=0\,.$$

Определение 1 можно переформулировать в следующей эквивалентной форме.

Определение 1′. Нулевое решение $x(t,\omega)\equiv 0$ (положение равновесия $x=0$) уравнения (1) называется устойчивым по вероятности (стохастически устойчивым), если любых $t_0\geq 0$ и $r>0$, и любого $\varepsilon\in(0,1)$ существует $\delta=\delta(\varepsilon,r,t_0)>0$ такое, что при $\|x_0\|<\delta$

$$\mathrm{P}\left\{\omega:\left\|x(t,\omega\ ;\ t_0,x_0)\right\|\leq r \text{ для всех } t\geq t_0\right\}\geq 1-\varepsilon .$$

Замечание 2. В [5, с. 47] вместо термина «устойчивость по вероятности» применяется «устойчивость с вероятностью 1» (из-за произвольности числа ε).

Определение 1 означает, что траектория процесса $x(t,\omega\ ;\ t_0,x_0)$, выходящая из точки x_0 в момент t_0, навсегда останется в любой заданной окрестности начала координат с вероятностью, стремящейся к единице, когда $x_0\to 0$.

Определение *неустойчивости по вероятности* нулевого решения есть логическое отрицание определения 1.

Определение 2 [4, с. 210]**.** Нулевое решение $x(t,\omega)\equiv 0$ уравнения (1) называется асимптотически устойчивым по вероятности (стохастически асимптотически устойчивым), если оно устойчиво по вероятности и, кроме того, справедливо соотношение

$$\lim_{x_0\to 0}\mathrm{P}\left\{\omega:\lim_{t\to+\infty}x(t,\omega;\ t_0,x_0)=0\right\}=1,$$

то есть для любых $t_0\geq 0$ и $\varepsilon\in(0,1)$ существует $\delta_0=\delta_0(\varepsilon,t_0)>0$ такое, что при $\|x_0\|<\delta_0$

$$\mathrm{P}\left\{\omega:\lim_{t\to+\infty}x(t,\omega;\ t_0,x_0)=0\right\}\geq 1-\varepsilon .$$

Определение 3 [4, с. 214]**.** Нулевое решение $x(t,\omega)\equiv 0$ уравнения (1) называется асимптотически устойчивым по вероятности в целом (стохастически асимптотически устойчивым в целом), если оно устойчиво по вероятности и, кроме того,

$$\mathrm{P}\left\{\omega:\lim_{t\to+\infty}x(t,\omega;\ t_0,x_0)=0\right\}=1$$

для всех $t_0\geq 0$ и всех $x_0\in\mathbb{R}^n$.

В определениях 1–3 стохастической устойчивости для заданного числа $r>0$ и начального значения x_0 группируются все те траектории (реализации) $t\to x(t,\omega\ ;\ t_0,x_0)$ процесса $x(t,\omega\ ;\ t_0,x_0)$, которые остаются для всех $t\geq t_0$ в r-окрестности точки $x=0$. И вероятность этого множества $\{\omega\}$ (соответствующее реализациям) в случае стохастической устойчивости должна быть близкой к 1 при условии, что $\|x_0\|$ достаточно мало.

Замечание 3. Определения 1–3 являются стохастическими аналогами соответствующих определений в детерминистическом случае, когда в уравнении (1) $\sigma(t,x)\equiv 0$.

Следующее определение является более слабым, чем определение 3.

Определение 4 [30, с. 161]**.** Нулевое решение $x(t,\omega)\equiv 0$ уравнения (1) называется глобально асимптотически устойчивым по вероятности, если оно устойчиво по вероятности и для любого $K>0$, и для любого решения $x(t)=x(t,\omega;\ t_0,x_0)$ ($t_0\geq 0$), для которого $\|x_0\|<K$ (почти наверное) выполняется соотношение: $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$ по вероятности, то есть для любого $r>0$

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{P}\{\omega:\ \|x(t)\| > r\} = 0.$$

Замечание 4. В определении 4, данном в [30], речь идет о слабых решениях стохастического уравнения (1). Под решением уравнения (1) мы везде понимаем (по определению самого решения) сильное решение. Любое сильное решение является и слабым (см. замечание 11 в [3]).

В данных выше определениях 1 и 2 устойчивость по вероятности и асимптотическая устойчивость по вероятности – это стохастические устойчивости в *сильном* смысле. Наряду с ней рассматривают также стохастическую устойчивость в *слабом* смысле. Введем это понятие.

Рассмотрим общее стохастическое дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x, \xi(t,\omega)), \tag{6}$$

где $\xi(t,\omega)$ ($t \ge 0$) – измеримый сепарабельный случайный процесс со значениями в R^m, а $F(t,x,z)$ $(t \ge 0, x \in R^n, z \in R^m)$ – измеримая по Борелю относительно (t,x,z) функция со значениями в R^n, для которой выполнены условия:

1) существует случайный процесс $B(t,\omega) \in \mathbf{L}$, то есть $B(t,\omega)$ абсолютно интегрируем на любом конечном интервале с вероятностью 1:

$$P\{\omega : \int_0^T |B(t,\omega)|\, dt < \infty\} = 1 \quad \text{для любого} \quad T > 0,$$

и такой, что для всех $x_1 \in R^n$ и $x_2 \in R^n$

$$\| F(t, x_2, \xi(t,\omega)) - F(t, x_2, \xi(t,\omega)) \| \le B(t,\omega) \| x_2 - x_1 \|;$$

2) процесс $F(t, 0, \xi(t,\omega) \in \mathbf{L}$.

Тогда уравнение (6) вместе с начальным условием

$$x(t_0) = x_0(\omega) \tag{7}$$

определяет в R^n при $t \ge t_0$ новый случайный процесс. А именно, *если выполнены вышеуказанные условия* 1) *и* 2), *то решение* (6), (7) *существует, единственно и представляет собой абсолютно непрерывный с вероятностью* 1 *случайный процесс при всех* $t \ge t_0$ [4, с. 26].

Замечание 5. Глобальное условие Липшица

$$\| F(t, x_2, \xi(t,\omega)) - F(t, x_2, \xi(t,\omega)) \| \le B(t,\omega) \| x_2 - x_1 \|$$

в указанном выше предположении 2) можно заменить на *локальное* условие Липшица: для любого $K > 0$ существует случайный процесс $B_K(t,\omega) \in \mathbf{L}$ такой, что для всех $x_1 \in U_K$ и $x_2 \in U_K$

$$\| F(t, x_2, \xi(t,\omega)) - F(t, x_2, \xi(t,\omega)) \| \le B_K(t,\omega) \| x_2 - x_1 \|,$$

где U_K – шар $\| x \| < K$. Однако следует заметить, что последнее условие не предохраняет от возможности ухода в бесконечность траектории случайного процесса за конечное время (даже и в детерминированном случае). Достаточное условие неограниченной продолжаемости решения уравнения (6) при выполнении локального условия Липшица дает теорема 3.2 из [4, с. 27].

Замечание 6. Уравнение вида

$$\dot{x} = f(t,x) + \sigma(t,x)\dot{\xi}(t),$$

где $\dot{\xi}(t)$ – белый шум, является частным случаем уравнения (6).

Предположим, что $F(t, 0, \xi(t,\omega)) \equiv 0$. Тогда уравнение (6) имеет нулевое реше-

ние $x(t,\omega)\equiv 0$. Без ограничения общности ограничимся определениями стохастической устойчивости для нулевого решения.

Определение 5 [4, с. 43]**.** Нулевое решение $x(t,\omega)\equiv 0$ уравнения (6) называется устойчивым слабо по вероятности (стохастически устойчивым в слабом смысле), если для любого $r>0$

$$\lim_{x_0\to 0}\sup_{t\ge t_0}\mathrm{P}\left\{\omega:\left\|x(t,\omega;\ t_0,x_0)\right\|>r\right\}=0,$$

то есть для любых $t_0\ge 0$, $r>0$, $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(r,\varepsilon,t_0)>0$ такое, что для всех $t\ge t_0$ и $\|x_0\|<\delta$

$$\mathrm{P}\left\{\omega:\left\|x(t,\omega;\ t_0,x_0)\right\|>r\right\}<\varepsilon.$$

Нетрудно видеть, что определение 5 значительно слабее, чем определение 1. Однако для *линейных систем стохастических дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами* (автономных линейных стохастических систем)

$$dx(t)=\mathrm{B}x(t)\,dt+\sum_{r=1}^{m}\sigma_r x(t)\,dw_r(t),$$

где B и σ_r – постоянные $(n\times n)$- и $(n\times m)$-матрицы соответственно (в (1): $b(x,t)=\mathrm{B}x$, $\sigma_r(t,x)=\sigma_r x$), определения 1 и 5 *совпадают* ([4, с. 296]). Однако, вообще говоря, из слабой стохастической устойчивости не следует сильная стохастическая устойчивость: соответствующий пример приведен в ([4, с. 296]).

Определение 6 [4, с. 43]**.** Нулевое решение $x(t,\omega)\equiv 0$ уравнения (6) называется асимптотически устойчивым слабо по вероятности (стохастически асимптотически устойчивым в слабом смысле), если оно устойчиво слабо по вероятности и, кроме того, для любого $t_0\ge 0$ и любого $r>0$ существует $\delta=\delta(r,t_0)$ такое, что при $\|x_0\|<\delta$

$$\lim_{t\to+\infty}\mathrm{P}\left\{\omega:\left\|x(t,\omega;\ t_0,x_0)\right\|>r\right\}=0.$$

Ясно, что определение 6, вообще говоря, слабее определения 2.

Определение 7 [4, с. 43]**.** Нулевое решение $x(t,\omega)\equiv 0$ уравнения (6) называется устойчивым слабо по вероятности в целом (стохастически устойчивым в целом в слабом смысле), если оно устойчиво слабо по вероятности и, кроме того, для любых $t_0\ge 0$, $x_0,\varepsilon>0$, $r>0$ можно указать $T=T(t_0,x_0,\varepsilon,r)>0$ такое, что при $t>T$ справедливо соотношение

$$\mathrm{P}\left\{\omega:\left\|x(t,\omega;\ t_0,x_0)\right\|>r\right\}<\varepsilon,$$

то есть для любых t_0,x_0 и любого $r>0$

$$\lim_{t\to+\infty}\mathrm{P}\left\{\omega:\left\|x(t,\omega;\ t_0,x_0)\right\|>r\right\}=0.$$

Замечание 7. Если в определении 7 число T не зависит от t_0,x_0, то есть $T=T(\varepsilon,r)$, то соответствующую устойчивость естественно назвать *асимптотической слабой устойчивостью по вероятности в целом*. Так получаемое определение близко по сути к определению понятия глобальной асимптотической устойчивости по вероятности (определение 4).

Определение 8. Нулевое решение $x(t,\omega)\equiv 0$ уравнения (6) называется асимптотически устойчивым слабо с вероятностью 1 в целом (асимптотически устойчивым

в целом в слабом смысле с вероятностью 1), если оно устойчиво слабо по вероятности и, кроме того, для любых $t_0 \geq 0$, x_0

$$\mathrm{P}\left\{\omega : \lim_{t\to+\infty} \left\| x\left(t,\omega;\ t_0, x_0\right)\right\| = 0\right\} = 1.$$

Во многих случаях бывает более целесообразным рассмотрение понятия *устойчивости моментов*: для фиксированного момента времени t берется среднее всех возможных значений $x(t) = x(t,\omega\ ;\ t_0, x_0)$ или некоторой функции g от $x(t)$: $g(x(t))$; затем берут $\mathrm{M}g(x(t)) = g_1(t)$ и рассматривают поведение полученной детерминистической функции $g_1(t)$ на бесконечном промежутке $[t_0, +\infty)$. Наиболее часто рассматривается случай $g(x) = \|x\|^p$, $p > 0$.

Определение 9 [4, с. 43, 231]**.** Нулевое решение $x(t,\omega) \equiv 0$ уравнения (6) называется p-устойчивым в среднем при $t \geq 0$ (где $p > 0$), если для любого $t_0 \geq 0$

$$\lim_{x_0\to 0} \sup_{t\geq t_0} M \left\| x\left(t,\omega;\ t_0, x_0\right)\right\|^p = 0,$$

то есть для любого $t_0 \geq 0$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что для всех $t \geq t_0$ и $\|x_0\| < \delta$

$$\mathrm{M}\left\| x\left(t,\omega;\ t_0, x_0\right)\right\|^p < \varepsilon.$$

Определение 10 [4, с. 43, 232]**.** Нулевое решение $x(t,\omega) \equiv 0$ уравнения (6) называется асимптотически p-устойчивым в среднем при $t \geq 0$ ($p > 0$), если оно p-устойчиво в среднем и, кроме того, для любого $t_0 \geq 0$

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{M}\left\| x\left(t,\omega;\ t_0, x_0\right)\right\|^p = 0$$

для всех x_0 из некоторой окрестности точки $x = 0$.

Если предельное равенство в определении 10 выполняется для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$, то говорят об *асимптотической p-устойчивости* (*в среднем*) *в целом*.

Определение 11 [4, с. 43, 232]**.** Нулевое решение $x(t,\omega) \equiv 0$ уравнения (6) называется экспоненциально p-устойчивым в среднем ($p > 0$), если существуют постоянные $\mathrm{A} > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что

$$\mathrm{M}\left\| x\left(t,\omega\ ;\ t_0, x_0\right)\right\|^p \leq \mathrm{A}\left\|x_0\right\|^p \exp\left\{-\alpha\left(t - t_0\right)\right\}.$$

При $p = 1$ или $p = 2$ говорят об устойчивости, асимптотической или экспоненциальной устойчивости в *среднем* или в *среднем квадратическом* соответственно.

Связь между различными типами устойчивости, данными в определениях 1–11, установлена в монографиях [4, гл. 5, 6] и [6, гл. 11]. Отметим некоторые из них.

1. В силу неравенства (являющегося простым следствием неравенства Гельдера)

$$\left(\mathrm{M}\left\|x(t)\right\|^p\right)^{1/p} \leq \left(\mathrm{M}\left\|x(t)\right\|^q\right)^{1/q} \quad \text{при} \quad 0 < p < q < \infty,$$

из асимптотической или экспоненциальной q-устойчивости в среднем следует соответственно такая же p-устойчивость в среднем. В частности, из среднеквадратической устойчивости ($p = 2$) следует устойчивость в среднем ($p = 1$).

2. В случае линейной стационарной системы

$$dx(t) = \mathrm{B}x(t)\,dt + \sum_{r=1}^{m} \sigma_r x(t)\,dw_r(t),$$

где $\mathrm{B},\ \sigma_r \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ($\mathrm{B},\ \sigma_r = const$), из асимптотической p-устойчивости следует экспоненциальная p-устойчивость [4, с. 255].

3. Из неравенства Чебышева

$$\mathrm{P}\left\{\omega : \left\|x(t,\omega\ ;\ t_0, x_0)\right\| > \varepsilon\right\} < \varepsilon^{-p}\mathrm{M}\left\|x(t,\omega\ ;\ t_0, x_0)\right\|^p \quad (p > 0,\ \ \varepsilon > 0)$$

следует, что

$$\sup_{t\ge t_0} \mathrm{P}\left\{\omega : \left\|x(t,\omega\ ;\ t_0, x_0)\right\| > \varepsilon\right\} < \varepsilon^{-p} \sup_{t\ge t_0} \mathrm{M}\left\|x(t,\omega\ ;\ t_0, x_0)\right\|^p .$$

Отсюда получаем, что p-устойчивость тривиального решения $x(t,\omega) \equiv 0$ (определение 9) влечет его стохастическую устойчивость в слабом смысле (определение 5).

4. Как было отмечено выше, определение 1 стохастической устойчивости в сильном смысле сильнее стохастической устойчивости в слабом смысле (определение 5), но обратное, вообще говоря, неверно (см. [4, гл. 6, § 11]).

5. Для *линейной* нестационарной однородной системы

$$dx(t) = b(t)x(t)\,dt + \sum_{r=1}^{m} \sigma_r(t)x(t)\,dw_r(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \ge t_0,$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $b(t)$, $\sigma_r(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – непрерывные на $[t_0, +\infty)$ матрицы, из асимптотической устойчивости по вероятности тривиального решения следует его асимптотическая устойчивость по вероятности *в целом* [4, гл. 6, с. 240]).

Замечание 8. Всюду ниже, если это не оговорено специально, все рассматриваемые виды стохастической устойчивости понимаются в сильном смысле (определения 1–3). Также под решениями стохастических дифференциальных уравнений понимаются (по определению решения) сильные решения.

2.6.4. Стохастическая устойчивость скалярного линейного дифференциального уравнения

Ниже приводятся достаточные условия стохастической устойчивости одномерного линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и с переменными коэффициентами.

Пример 1. Рассмотрим одномерное (скалярное) автономное линейное однородное дифференциальное уравнение

$$dx(t) = bx(t)\,dt + \sigma x(t)\,dw(t), \quad x(t_0) = x_0. \tag{8}$$

(Здесь $n = m = 1$; b, σ – постоянные числа.)

Используя одномерную формулу Ито (см. утверждение 1 из [3]), можно убедиться, что единственным решением уравнения (8) будет процесс

$$x(t) = x_0 \exp\left[\left(b - \sigma^2/2\right)(t - t_0) + \sigma\left(w(t) - w(t_0)\right)\right]. \tag{9}$$

Пользуясь определением 3 и известным свойством винеровского процесса [6, с. 185]

$$\mathrm{P}\left\{\omega : \lim_{t\to\infty} \frac{w(t) - w(t_0)}{t - t_0} = 0\right\} = 1,$$

получаем из (9) следующее

Утверждение 1. Нулевое решение $x(t) \equiv 0$ (положение равновесия $x = 0$) уравнения Ито (8):

a) асимптотически устойчиво по вероятности в целом, если $b < \sigma^2/2$;

b) неустойчиво по вероятности, если $b \geq \sigma^2/2$ ($\sigma \neq 0$).

Сделаем следующее важное замечание. Стохастическое уравнение Ито (8) – это интерпретация уравнения

$$\dot{x}(t) = \left(b + \sigma\dot{w}(t)\right)x(t), \tag{10}$$

возмущенного «белым шумом» $\sigma\dot{w}(t)$ (σ^2 называется интенсивностью белого шума, $\dot{w}(t)$ – белый шум единичной интенсивности). Соблазнительно интерпретировать утверждение 1 так [4, с. 218]: «неустойчивая детерминированная система первого порядка стабилизируется, если на ее коэффициент накладывается процесс белого шума достаточно большой интенсивности». Это утверждение противоречит физической интуиции. Однако оно и неверно, если уравнение (10) интерпретировать как стохастическое дифференциальное уравнение в смысле Стратоновича

$$dx(t) = bx(t)dt + \sigma x(t) \circ dw(t), \quad x(t_0) = x_0. \tag{11}$$

Поскольку уравнение (11) эквивалентно уравнению Ито (см. п. 2.5.4 [3]),

$$dx(t) = \left(b + \sigma^2/2\right)x(t)dt + \sigma x(t)dw(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

решение последнего уравнения задается аналогично (9) формулой

$$x(t) = x_0 \exp\left[b(t - t_0) + \sigma\left(w(t) - w(t_0)\right)\right]. \tag{13}$$

Из (13) имеем следующее

Утверждение 2. Нулевое решение $x(t) \equiv 0$ уравнения Стратоновича (11) асимптотически устойчиво по вероятности в целом при любом $\sigma \neq 0$, если $b < 0$, и неустойчиво по вероятности, если $b > 0$.

Из утверждения 2 следует, что одномерная устойчивая система $\dot{x} = bx$ ($b < 0$) остается устойчивой при возмущении «в форме Стратоновича» ее параметра b «белым шумом» любой интенсивности σ^2. Этот факт имеет место, в силу утверждения 1, и при возмущениях «в форме Ито». В монографии [4, с. 222] показано, что это свойство не сохраняется для уравнений Ито при размерности пространства $n \geq 3$, а для уравнений Стратоновича – при размерности $n \geq 2$: в этих случаях при достаточно большой интенсивности белого шума теряется устойчивость.

Пример 2. Рассмотрим одномерное линейное однородное стохастическое дифференциальное уравнение Ито с переменными коэффициентами

$$dx(t) = b(t)x(t)dt + \sum_{r=1}^{m} \sigma_r(t)x(t)dw_r(t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{14}$$

где $b(t)$ и $\sigma_r(t)$ ($r = 1,...,m$) – непрерывные вещественнозначные функции на $\left[t_0, +\infty\right)$.

С помощью формулы Ито (см. п. 2.4.2 [3]) можно убедиться, что единственное решение уравнения (14), определенное на $\left[t_0, +\infty\right)$, дается следующей формулой (равенство выполняется *почти наверное*):

$$x(t) = x_0 \exp\left[\int_{t_0}^{t}\left(b(s) - \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sigma_r(s)^2\right)ds + \sum_{r=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\sigma_r(s)dw_r(s)\right]. \tag{15}$$

Отсюда непосредственно следует, что положение равновесия $x = 0$ уравнения (14) *устойчиво по вероятности* тогда и только тогда, когда почти наверное (то есть с вероятностью 1)

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\left(\int_{t_0}^{t}\left(b(s)-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sigma_r(s)^2\right)ds+\sum_{r=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\sigma_r(s)\,dw_r(s)\right)<\infty .$$

Аналогично, положение равновесия $x=0$ уравнения (14) *асимптотически устойчиво по вероятности* тогда и только тогда, когда почти наверное

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\left(\int_{t_0}^{t}\left(b(s)-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sigma_r(s)^2\right)ds+\sum_{r=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\sigma_r(s)\,dw_r(s)\right)=-\infty .$$

Используя формулу (15), в [7, с. 118] и [6, с. 194] выведено достаточное условие асимптотической устойчивости по вероятности в целом тривиального решения уравнения (14).

Утверждение 3 ([6, с. 194], [7, с. 118])**.** Нулевое решение $x(t)\equiv 0$ уравнения (14) стохастически асимптотически устойчиво в целом, если

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\int_{t_0}^{t}b(s)\,ds-\frac{1}{2}\sigma(t)}{\sqrt{2\sigma(t)\ln\ln\sigma(t)}}<-1 \tag{16}$$

и $\sigma(\infty)=\infty$, где $\sigma(t)=\sum_{r=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\sigma_r(s)^2\,ds$, $t\in[t_0,+\infty)$. Если же $\sigma(\infty)<\infty$, то тривиальное решение $x(t)\equiv 0$ стохастически асимптотически устойчиво в целом тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{t_0}^{t}b(s)ds=-\infty .$$

В *автономном случае*, когда в уравнении (14) коэффициенты $b(t)\equiv b$, $\sigma_r(t)\equiv\sigma_r$ ($b=const$, $\sigma_r=const$), условие (16) имеет место тогда и только тогда, когда

$$b<\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sigma_r^2 . \tag{17}$$

Справедливо

Утверждение 4. Пусть в уравнении (14) $b(t)\equiv b$, $\sigma_r(t)\equiv\sigma_r$, где b и σ_r – постоянные. Тогда положение равновесия $x=0$ автономного уравнения (14) стохастически асимптотически устойчиво в целом, если выполнено неравенство (17).

Таким образом, при выполнении неравенства (17) решения уравнения (14), где $b(t)\equiv b$, $\sigma_r(t)\equiv\sigma_r$ ($b=const$, $\sigma_r=const$), будут стремиться к положению равновесия $x=0$. Однако, учитывая в этом случае автономность уравнения (14) ($b(t)\equiv b$, $\sigma_r(t)\equiv\sigma_r$), можно выяснить, как быстро решения стремятся к нулю. Действительно, в рассматриваемом автономном случае единственное решение уравнения (14) с начальным условием $x(t_0)=x_0$ дается формулой

$$x(t,t_0,x_0)=x_0\exp\left[(b-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}b_r^2)(t-t_0)+\sum_{r=1}^{m}b_r(w_r(t)-w_r(t_0)\right]. \tag{19}$$

Из (19) получаем

$$\ln|x(t,t_0,x_0)|=\ln|x_0|+\left[(b-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}b_r^2)(t-t_0)+\sum_{r=1}^{m}b_r(w_r(t)-w_r(t_0)\right]. \tag{20}$$

Используя закон повторного логарифма для винеровского процесса [34, с. 380]

$$P\{\omega : \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{w(t,\omega)}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = 1\} = 1,$$

нетрудно получить предельное соотношение

$$P\left\{\omega : \lim_{t\to+\infty} \frac{w(t,\omega) - w(t_0,\omega)}{t} = 0\right\} = 1. \qquad (21)$$

С учетом (21) из равенства (20) имеем (почти наверное)

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} |\ln x(t,t_0,x_0)| = b - \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m} b_r . \qquad (22)$$

Если неравенство (17) имеет место, то из (22) следует, что характеристический показатель Ляпунова (левая часть равенства (22)) отрицателен. Следовательно, для любого $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m} b_r - b$ можно найти положительную случайную величину $\xi = \xi(t_0, x_0, \varepsilon)$ такую, что (почти наверное)

$$|x(t,t_0,x_0)| = \xi \exp\left[(b - \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m} b_r^2 + \varepsilon)(t - t_0)\right] \quad \text{для всех} \quad t \ge t_0 .$$

Из последнего равенства следует, что почти все выборочные функции (траектории или реализации случайного процесса) решения автономного уравнения (14) ($b(t) \equiv b$, $\sigma_r(t) \equiv \sigma_r$) будут *экспоненциально быстро* стремиться к положению равновесия $x = 0$. Такое свойство решений в [7, с. 119)] названо «почти наверное экспоненциальной устойчивостью» (almost sure exponential stability). А именно, *нулевое решение уравнения* (1) *называется почти наверное экспоненциально устойчивым* (*экспоненциально устойчивым с вероятностью* 1)*, если для всех* $x_0 \in R^n$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln |x(t,t_0,x_0)| < 0 \quad (\textit{п.н.}).$$

Отметим, что, вообще говоря, почти наверное экспоненциальная устойчивость и экспоненциальная p-устойчивость в среднем не выводятся одна из другой [7, с. 128].

Формула (15) может быть использована также для получения достаточного условия *асимптотической* p*-устойчивости* решения $x(t) \equiv 0$ уравнения (14). Ограничимся для простоты случаем $m = 1$. Вычислим $\mathrm{M}|x(t)|^p$ ($p > 0$), где $x(t)$ – решение уравнения (14). Для этого используем следующую простую формулу [6, с. 138]:

$$\mathrm{M}\left(e^{\eta}\right)^p = e^{pm + p^2\sigma^2/2}, \qquad (23)$$

где η – нормально распределенная случайная величина с параметрами $m = \mathrm{M}\eta$, $\sigma^2 = D\eta$ и плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}} .$$

Используя равенство (23) и свойства интеграла Ито

$$\mathrm{M}\int_{t_0}^{t} \sigma(s)\,dw(s) = 0, \quad \mathrm{M}\left(\int_{t_0}^{t} \sigma(s)\,dw(s)\right)^2 = \int_{t_0}^{t} \sigma(s)^2\,ds,$$

из (15) имеем:

$$\mathrm{M}|x(t)|^p = \mathrm{M}|x_0|^p \cdot \mathrm{M}\exp\left[p\int_{t_0}^{t}\left(b(s) - \frac{\sigma(s)^2}{2}\right)ds + p\int_{t_0}^{t}\sigma(s)\,dw(s)\right] =$$

$$=|x_0|^p \exp\int_{t_0}^{t} p\left(b(s)-\frac{\sigma(s)^2}{2}\right)ds\cdot \mathrm{M}\exp p\int_{t_0}^{t}\sigma(s)dw(s)=$$

$$=|x_0|^p\cdot\exp\left\{p\int_{t_0}^{t}\left(b(s)-\frac{\sigma(s)^2}{2}\right)ds+\frac{p^2}{2}\int_{t_0}^{t}\sigma(s)^2\,ds\right\}=$$

$$=|x_0|^p\cdot\exp\left(p\int_{t_0}^{t}b(s)\,ds+\frac{p(p-1)}{2}\int_{t_0}^{t}\sigma(s)^2\,ds\right).$$

Отсюда получаем

Утверждение 5 ([6, с. 193])**.** Нулевое решение $x(t)\equiv 0$ уравнения (14) ($m=1$):

a) асимптотически p-устойчиво тогда и только тогда, когда

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\int_{t_0}^{t}\left(b(s)+\frac{p-1}{2}\sigma(s)^2\right)ds=-\infty;$$

b) экспоненциально p-устойчиво тогда и только тогда, когда

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\left(b(s)+\frac{p-1}{2}\sigma(s)^2\right)ds<0.$$

В *автономном случае*, когда в уравнении (14) ($m=1$) коэффициенты $b(t)\equiv b$, $\sigma_r(t)\equiv\sigma_r$ ($b=const$, $\sigma_r=const$), неравенство в b) имеет место тогда и только тогда, когда

$$b+\frac{p-1}{2}\sigma^2<0,\quad \text{то есть}\quad b<\frac{1-p}{2}\sigma^2.$$

Аналогичные условия асимптотической p-устойчивости и экспоненциальной p-устойчивости можно получить и в случае $m>1$ ([7, с. 135]).

2.6.5. Основные теоремы о стохастической устойчивости

Здесь формулируются основные теоремы об устойчивости в том или ином смысле решений стохастических систем в терминах функций Ляпунова, которые представляют собой аналоги классических теорем Ляпунова об устойчивости для детерминированных систем.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито (1). Предположим, что функции $b(t,x)$ и $\sigma_r(t,x)$ $(r=1,...,m)$ удовлетворяют всем условиям теоремы существования и единственности глобального решения уравнения (1) (см. замечание 10 к теореме 2.1 из [3]).

Далее предположим, что $b(t,0)\equiv 0$, $\sigma(t,0)\equiv 0$ на $[t_0,+\infty)$, так что $x(t,\omega\,;\,t_0,x_0)\equiv 0$ является тривиальным решением уравнения (1).

Пусть L – дифференциальный оператор, определенный формулой (2). Пусть $U_h=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|<h\}$, $h>0$, – некоторый шар радиуса r с центром в точке $x=0$. Обозначим через $C_0^{1,2}\left([t_0,+\infty)\times U_h,\mathbb{R}\right)$ класс всех функций $\mathrm{V}(t,x)$, определенных на $[t_0,+\infty)\times U_h$, непрерывно дифференцируемых один раз по t и дважды непрерывно дифференцируемых по координатам x_i вектора $x=(x_1,...,x_n)$ (то есть $\partial\mathrm{V}/\partial t$, $\partial\mathrm{V}/\partial x_i$,

$\partial^2 \mathrm{V} / \partial x_i \partial x_j$ непрерывны) всюду в области $\left[t_0, +\infty\right) \times U_h$, кроме, быть может, множества $\left[t_0, +\infty\right) \times \left\{x = 0\right\}$ (полупрямой $x = 0$).

Приводимые ниже теоремы являются естественным обобщением теорем прямого метода (второго метода) Ляпунова об устойчивости на стохастические системы.

Следующая теорема аналогична первой теореме Ляпунова об устойчивости для детерминированных систем. (Здесь мы продолжаем нумерацию теорем, начатую в [3].)

Теорема 2.4 ([4, с. 207]). *Пусть в области* $\left[t_0, +\infty\right) \times U_h$, $U_h = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < h\right\}$, *где* $h > 0$, *существует непрерывная положительно-определенная функция* $\mathrm{V}(t, x) \in C_0^{1,2}\left(\left[t_0, +\infty\right) \times U_h, \mathbb{R}_+\right)$, *удовлетворяющая при всех* $t \geq t_0$ *и* $x \in U_h$ *условию*

$$L\mathrm{V} = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t, x) \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x_i \partial x_j} \leq 0,$$

где $a_{ij}(t, x) = \left(\sigma(t, x) \sigma(t, x)^{\mathrm{T}}\right)_{ij}$ *– элементы матрицы* $\sigma(t, x) \sigma(t, x)^{\mathrm{T}}$.

Тогда тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ *уравнения* (1) *устойчиво по вероятности.*

Замечание 9. В условие теоремы 2.4 входит требование достаточной гладкости соответствующей функции Ляпунова всюду в окрестности множества $\left[t_0, +\infty\right) \times \left\{x = 0\right\}$ кроме, быть может, самой полупрямой $x = 0$. Как отмечено в [4, с. 199]: «Это не случайно. В отличие от детерминированного случая, гладкой в нуле функции Ляпунова для стохастической системы часто и не существует». В [4, с. 210] приведен соответствующий пример.

Говорят, что функция $\mathrm{V}(t, x)$ имеет *бесконечно малый высший предел* при $x \to 0$ (см. [1; 47, с. 237]), если $\mathrm{V}(t, x)$ стремится к нулю при $x \to 0$ равномерно на $\left[t_0, +\infty\right)$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\left|\mathrm{V}(t, x)\right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad \|x\| < \delta \quad \text{и} \quad t \in \left[t_0, +\infty\right).$$

В частности, если $\mathrm{V}(t, x) \equiv \mathrm{V}(x)$ ($\mathrm{V}(t, x)$ не зависит от t) и $\mathrm{V}(x)$ – непрерывная функция такая, что $\mathrm{V}(0) = 0$, то $\mathrm{V}(x)$ допускает бесконечно малый высший предел.

Следующая теорема аналогична второй теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости для детерминированных систем.

Теорема 2.5 ([4, с. 212]). *Пусть в области* $\left[t_0, +\infty\right) \times U_h$ *существует положительно-определенная функция* $\mathrm{V}(t, x) \in C_0^{1,2}\left(\left[t_0, +\infty\right) \times U_h, \mathbb{R}_+\right)$, *допускающая бесконечно малый высший предел и такая, что функция* $L\mathrm{V}$ *отрицательно определена. Тогда тривиальное решение* $x(t) \equiv 0$ *уравнения* (1) *асимптотически устойчиво по вероятности.*

Замечание 10. При условиях теоремы 2.5 справедлива следующая вероятностная оценка [6, с. 183]:

$$\mathrm{P}\left\{\omega : \sup_{t \geq t_0} V(x(t, \omega;\ t_0, x_0) \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{V(x_0)}{\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0.$$

В автономном случае, когда уравнение (1) имеет вид

$$dx(t) = b(x)dt + \sigma(x)dw(t), \quad b(0) = \sigma(0) = 0,$$

условие существования функции $\mathrm{V}(t,x)$ в теореме 2.5 можно заменить на условие существования функции $\mathrm{V}(x)$, не зависящей от t.

Дополнением к теоремам 2.4 и 2.5 в автономном случае служит

Теорема 2.6 ([5, с. 57, 62, 63]). *Пусть для автономного уравнения* (1), *где* $b(t,x) \equiv b(x)$, $\sigma(t,x) \equiv \sigma(x)$, *выполнены предположения п.* 2.6.1. *Пусть в области* $U_h = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < h\}$, $h > 0$, *существует неотрицательная* (*тождественно не равная нулю*) *функция* $\mathrm{V}(x)$, *имеющая непрерывные частные производные первого и второго порядков*: $\mathrm{V} \in C^2(U_h)$. *Предположим, что для некоторого фиксированного положительного числа* m *множество* $Q_m = \{x : \mathrm{V}(x) < m\} \subset U_h$ *ограничено и функция* $\mathrm{V}(x)$ *удовлетворяет в области* Q_m *условию*

$$L\mathrm{V} = -k(x) \le 0$$

($k(x)$ – *непрерывная функция на* Q_m).

Тогда для любого решения $x(t,\omega;\ t_0,x_0)$, $x_0 \in Q_m$, *уравнения* (1):

a) $\mathrm{P}\left\{\omega : \sup\limits_{t \ge t_0} V(x(t,\omega;\ t_0,x_0) \ge m\right\} \le \dfrac{V(x_0)}{m}$;

b) $\mathrm{P}\left\{\omega : x(t,\omega;\ t_0,x_0) \to S_m \text{ при } t \to +\infty\right\} \ge 1 - \dfrac{\mathrm{V}(x_0)}{m}$,

где $S_m = \{x : k(x) = 0\} \cap Q_m$.

Если же $U_h = \mathbb{R}^n$ ($h = \infty$) *и условия теоремы* 2.6 *выполняются для всех* $m > 0$, *то* $x(t,\omega\ ;\ t_0,x_0) \to S_m$ при $t \to +\infty$ *сколь угодно близкой к* 1.

Неравенство a) в заключении теоремы 2.6 означает, что решение $x(t,\omega;\ t_0,x_0)$ остается строго внутри Q_m с вероятностью не меньшей, чем $1 - (V(x_0)/m)$.

Следующие три теоремы являются различными обобщениями известной теоремы Барбашина-Красовского на стохастические уравнения.

Теорема 2.7 ([4, с. 215]). *Пусть в области* $[t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ *существует положительно-определенная функция* $\mathrm{V}(t,x) \in C_0^{1,2}([t_0,+\infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$, *допускающая бесконечно малый высший предел и такая, что функция* $L\mathrm{V}$ *отрицательно определена, причем*

$$\inf_{t \ge t_0} \mathrm{V}(t,x) \to +\infty \quad \textit{при} \quad \|x\| \to \infty.$$

Тогда тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ *уравнения* (1) *асимптотически устойчиво по вероятности в целом.*

В автономном случае ($b(t,x) \equiv b(x)$ $\sigma(t,x) \equiv \sigma(x)$) в теореме 2.7 вместо функции $\mathrm{V}(t,x)$ достаточно потребовать существование функции $\mathrm{V}(x)$, не зависящей от t.

Теорема 2.8 ([30, с. 162]). *Пусть для автономного уравнения* (1), *где* $b(t,x) \equiv b(x)$, $\sigma(t,x) \equiv \sigma(x)$, *существует положительно-определенная функция* $\mathrm{V} \in C^2(R^n, R_+)$, *удовлетворяющая при всех* $x \in R^n$ *условию* $LV \le 0$. *Если, кроме то-*

го, $\mathrm{V}(x) \to +\infty$ *при* $\|x\| \to \infty$ *и множество* $S = \{x : LV = 0\}$ *не содержит ненулевых решений, то нулевое решение уравнения* (1) *глобально асимптотически устойчиво по вероятности.*

Теорема 2.9 ([30, с. 163])**.** *Пусть для автономного уравнения* (1), *где* $b(t,x) \equiv b(x)$, $\sigma(t,x) \equiv \sigma(x)$, *существует функция* $\mathrm{V} \in C^2(R^n, R_+)$, *удовлетворяющая при всех* $x \in R^n$ *условиям*:

a) *для некоторых положительных чисел* p *и* k_1

$$\mathrm{V}(x) \geq k_1 \| x \|^p \quad \text{для всех} \quad x \in R^n ;$$

b) *не существует ненулевых решений уравнения* (1), *принадлежащих множеству* $S = \{x : LV = 0\}$.

Тогда нулевое решение уравнения (1) *глобально асимптотически* p*-устойчиво* (*асимптотически* p*-устойчиво в целом*).

Пример 3. Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение (8) из примера 1. Производящий дифференциальный оператор L для уравнения (8) имеет вид:

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + bx\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} .$$

В качестве функции Ляпунова возьмем $\mathrm{V}(t,x) \equiv \mathrm{V}(x) = |x|^\alpha$. Имеем для $x \neq 0$:

$$L\left(|x|^\alpha\right) = \alpha |x|^\alpha \left(b + \frac{1}{2}\sigma^2(\alpha - 1)\right).$$

Пусть $b < \frac{\sigma^2}{2}$. Выберем α так, чтобы $b + \frac{1}{2}\sigma^2(\alpha - 1) < 0$, то есть $0 < \alpha < 1 - 2b/\sigma^2$. Тогда

$$L\mathrm{V} \leq -k\mathrm{V} ,$$

где $k = \alpha\left(\frac{1}{2}\sigma^2(1-\alpha) - b\right)$. Последнее неравенство, достаточно для асимптотической устойчивости по вероятности. Поскольку функция $\mathrm{V}(x) = |x|^\alpha$ положительно определена и бесконечно большая при $x \to \infty$, то в силу теоремы 2.7 нулевое решение уравнения (8) асимптотически устойчиво по вероятности в целом, если $b < \frac{\sigma^2}{2}$. Последнее является частным случаем $(m = 1)$ сформулированного выше утверждения 4.

Замечание 11. Можно также получить достаточные условия стохастической неустойчивости тривиального решения уравнения (1) в терминах функций Ляпунова (см. [4, с. 213, 214]). В частности, выбирая функцию $\mathrm{V}(x) = -\ln|x|$, можно установить, что рассмотренное выше в примере 1 уравнение (8) неустойчиво по вероятности, если $b \geq \sigma^2/2$ (ср. утверждение 1). В детерминистическом случае $\sigma = 0$ нулевое решение уравнения (8) асимптотически устойчиво, если $b < 0$, просто устойчиво, если $b = 0$, и неустойчиво, если $b > 0$.

Следующая теорема дает достаточное условие экспоненциальной p-устойчивости стохастической системы (1) в терминах функций Ляпунова.

Теорема 2.10 ([4, с. 232])**.** *Для экспоненциальной* p*-устойчивости тривиального решения* $x(t) \equiv 0$ *уравнения* (1) *достаточно, чтобы существовала функция* $\mathrm{V}(t,x)$,

принадлежащая классу $C_0^{1,2}\left(\left[t_0,+\infty\right)\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}_+\right)$ *и удовлетворяющая при некоторых положительных постоянных* k_1, k_2, k_3 *неравенствам*

$$k_1\|x\|^p\le \mathrm{V}(t,x)\le k_2\|x\|^p,\quad L\mathrm{V}(t,x)\le -k_3\|x\|^p.$$

Следующая теорема дает достаточное условие экспоненциальной устойчивости с вероятностью 1 тривиального решения стохастического уравнения (1), обобщающее результат работы [35].

Теорема 2.11 ([4, с. 236])**.** *Пусть выполнены условия теоремы* 2.10. *Тогда существует постоянная* $\gamma>0$ *такая, что для любых* $x_0\in\mathbb{R}^n$, $t_0>0$ *при* $t\ge t_0$ *с вероятностью* 1 *справедливо соотношение*

$$\left\|x(t,\omega\,;\,t_0,x_0)\right\|<K(\omega\,;\,t_0,x_0)e^{-\gamma t}.$$

При этом случайная величина $K(\omega\,;\,t_0,x_0)$ *почти наверное* (*при почти всех* ω) *конечна.*

В случае, когда система (1) линейна, $b(t,x)=b(t)x(t)$, $\sigma_r(t,x)=\sigma_r(t)x(t)$, где $b(t)$, $\sigma_r(t)$ – матрицы, а $x(t)$ – вектор-столбец, можно конкретизировать класс функций Ляпунова и дать необходимые и достаточные условия экспоненциальной p-устойчивости в этом классе функций.

Рассмотрим линейную стохастическую систему

$$dx(t)=b(t)x(t)dt+\sum_{r=1}^{m}\sigma_r(t)x(t)dw_r(t),\ t\ge t_0, \tag{24}$$

где $x(t)\in\mathbb{R}^n$, $b(t)$, $\sigma_r(t)\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $w_r(t)(r=1,...,m)$ – одномерные винеровские процессы.

Предположим, что $\|b(t)\|$ и $\|\sigma_r(t)\|$ ограничены на $\left[t_0,+\infty\right)$.

Теорема 2.12 ([4, с. 247])**.** *Для экспоненциальной* p*-устойчивости тривиального решения* $x(t)\equiv 0$ *системы* (24) *необходимо и достаточно, чтобы существовала однородная по* x *порядка* p *функция* $\mathrm{V}(t,x)$, *удовлетворяющая условиям* $k_i>0$

$$k_1\|x\|^p\le \mathrm{V}(t,x)\le k_2\|x\|^p,\quad L\mathrm{V}(t,x)\le -k_3\|x\|^p,$$

$$\left|\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_i}\right|\le k_4\|x\|^{p-1},\quad \left|\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x_i\partial x_j}\right|\le k_4\|x\|^{p-2},\quad i,j=1,...,n.$$

В случае четных p справедливо следующее утверждение, позволяющее «обнаружить» экспоненциальную p-устойчивость системы (24) с помощью однородных функций из более или менее узкого класса.

Теорема 2.13 ([4, с. 248])**.** *Для экспоненциальной* p*-устойчивости четного порядка* ($p=2,4,...$) *системы* (24) *необходимо, чтобы для любой положительно-определенной формы* $\mathrm{W}(t,x)$ *порядка* p, *коэффициенты которой – непрерывные ограниченные функции времени, нашлась положительно-определенная форма* $\mathrm{V}(t,x)$ *того же порядка, удовлетворяющая условию*

$$L\mathrm{V}=-\mathrm{W}.$$

То же самое условие достаточно с заменой фразы «для любой» на фразу «для какой-нибудь».

Замечание 12. Если линейная система (24) *стационарна*, то есть матрицы $b(t)$ и $\sigma_r(t)$ – постоянные, то в формулировке теоремы 2.12 можно заменить формы $\mathrm{V}(t,x)$ и $\mathrm{W}(t,x)$ формами $\mathrm{V}(x)$ и $\mathrm{W}(x)$ с *постоянными* коэффициентами ([4, с. 249]).

Теоремы 2.4–2.8 дают достаточные условия стохастической устойчивости в сильном смысле (в смысле определений 1–4). Ниже мы сформулируем одну теорему, дающую достаточные условия асимптотической устойчивости по вероятности в целом в слабом смысле тривиального решения дифференциального уравнения, правая часть которого возмущена случайным процессом из более широкого класса, чем процесс типа «белый шум».

Рассмотрим стохастическую систему вида

$$\dot{x} = f(t,x) + \sigma(t,x)\xi(t,\omega) \quad (\dot{x} = dx/dt), \tag{25}$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$, $f(t,x) \in \mathbb{R}^n$, $x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\xi(t,\omega)$ – m-мерный векторный случайный процесс, $t \in [t_0, +\infty)$. Предположим, что $f(t,0) \equiv 0$, $\sigma(t,0) \equiv 0$.

Теорема 2.14 ([4, с. 45]). *Предположим, что для укороченной системы* $\dot{x} = f(t,x)$ *существует функция Ляпунова* $\mathrm{V}(t,x)$, *удовлетворяющая условиям*:

a) положительной определенности равномерно по t: *при любом* $r > 0$ *существует число* $\mathrm{V}_r > 0$ *такое, что*

$$\mathrm{V}(t,x) \ge V_r \quad \text{для всех} \quad t > 0 \quad \text{и} \quad \|x\| > r, \quad V(t,0) \equiv 0;$$

b) (*глобальному условию Липшица по* x):

$$\left|\mathrm{V}(t,x_2) - \mathrm{V}(t,x_1)\right| \le \mathrm{B}\|x_2 - x_1\| \quad \text{для всех} \quad t \ge t_0 \quad \text{и всех} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n;$$

c) $\dfrac{d^\circ \mathrm{V}}{dt} \le -c_1 \mathrm{V}$ *для некоторой константы* $c_1 > 0$;

d) $\|\sigma\| \le c_2 V$ *для некоторой константы* $c_2 > 0$,

где $\dfrac{d^\circ \mathrm{V}}{dt}$ *– производная функции* V *в силу системы* $\dot{x} = f(t,x)$.

Пусть далее процесс $\|\xi(t,\omega)\|$ *удовлетворяет закону больших чисел*: $\forall \varepsilon > 0$ *и* $\forall \delta > 0 \quad \exists \mathrm{T} > 0$:

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t_0+t} \|\xi(s,\omega)\| ds - \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t_0+t} \mathrm{M}\|\xi(s,\omega)\| ds\right| > \delta\right\} < \varepsilon \quad \text{при} \quad t > \mathrm{T},$$

и условию

$$\sup_{t \ge t_0} \mathrm{M}\|\xi(t,\omega)\| < \frac{c_1}{\mathrm{B}c_2}.$$

Тогда тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ *системы* (25) *асимптотически устойчиво слабо по вероятности в целом.*

Если же процесс $\|\xi(t,\omega)\|$ *удовлетворяет усиленному закону больших чисел, то те же условия обеспечивают асимптотическую слабую устойчивость в целом решения* $x(t) \equiv 0$ *с вероятностью* 1.

Достаточные условия экспоненциальной p-устойчивости тривиального решения системы (25) даются теоремой 5.2 из [4, с. 46].

В детерминированном случае $(\sigma(t,x)\equiv 0)$ в ряде работ рассматривалась задача об устойчивости решений системы $\dot{x}=f(t,x)$ при постоянно действующих возмущениях. Известно [12, с. 316], что для такой устойчивости достаточно, чтобы тривиальное решение системы $\dot{x}=f(t,x)$ $(f(t,0)\equiv 0)$ было асимптотически устойчиво равномерно по начальным данным (Малкин). В стохастическом случае, когда на правую часть системы $\dot{x}=f(t,x)$ накладываются случайные возмущения, такая устойчивость может оказаться недостаточной. В частности, саму устойчивость здесь следует понимать лишь в том смысле, что в любой фиксированный момент времени траектория находится в окрестности начала координат с достаточно большой вероятностью ([4, с. 49]). Теоремы, дающие достаточные условия устойчивости детерминированных систем при малых случайных возмущениях, приведены и доказаны в монографии [4, с. 50–52].

Продолжение следует.

To be continued.

Примечания

1. Шумафов М.М., Панеш Т.А., Хаваджа М.А. Об устойчивости в целом по вероятности решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, возмущенных белым шумом. I // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер.: Естественно-математические и технические науки. 2021. Вып. 4 (291). С. 11–23. URL: http://vestnik.adygnet.ru
2. Шумафов М.М., Панеш Т.А., Хаваджа М.А. Об устойчивости в целом по вероятности решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, возмущенных белым шумом. II // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер.: Естественно-математические и технические науки. 2022. Вып. 1 (296). С. 11–30. URL: http://vestnik.adygnet.ru
3. Шумафов М.М., Панеш Т.А., Хаваджа М.А. Об устойчивости в целом по вероятности решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, возмущенных белым шумом. III // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер.: Естественно-математические и технические науки. 2022. Вып. 2 (301). С. 11–38. URL: http://vestnik.adygnet.ru
4. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. Москва: Наука, 1969. 368 с.
5. Кушнер Г.Дж. Стохастическая устойчивость и управление. Москва: Мир, 1967. 200 с.
6. Arnold L. Stochastic Differential Equations: Theory and Applications. New York: John Wiley and Sons, 1974. 228 p.
7. Mao X. Stochastic Differential Equations and Applications. 2nd ed. Chichester: Horwood Publishing Limited, 2007. 422 p.
8. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1968. 612 с.
9. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения: докторская диссертация. Харьковский университет, 1892. 251 с.
10. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. 3-е изд. Москва: Наука, 1965. 207 с.
11. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. Москва: ИЛ, 1954. 216 с.
12. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. 2-е изд. Москва: Наука, 1966. 530 с.
13. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Москва: Физматгиз, 1959. 211 с.
14. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова: пер. с англ. / под ред. Ф.Р. Гантмахера. Москва: Мир, 1964. 168 с.
15. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: Мир, 1964. 477 с.
16. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. Москва: Наука, 1967. 223 с.
17. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. Москва: Наука, 1967. 472 с.
18. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. Москва: Наука, 1971. 312 с.
19. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным положением равновесия. Москва: Наука, 1978. 400 с.

20. Левит М.В. Частотный критерий абсолютной стохастической устойчивости нелинейных систем дифференциальных уравнений Ито // Успехи математических наук. 1972. Т. 27, вып. 4 (166). С. 215–216.
21. Левит М.В., Якубович В.А. Алгебраические критерии стохастической устойчивости линейных систем с параметрическим воздействии типа «белый шум» // Прикладная математика и механика. 1972. Вып. 1. С. 143–146.
22. Пакшин П.В. Устойчивость одного класса нелинейных стохастических систем // Автоматика и телемеханика. 1977. Вып. 4. С. 27–36.
23. Пакшин П.В. Экспоненциальная устойчивость одного класса нелинейных стохастических систем // Автоматика и телемеханика. 1980. Вып. 2. С. 65–71.
24. Пакшин П.В., Угриновский В.А. Стохастические задачи абсолютной устойчивости // Автоматика и телемеханика. 2006. Вып. 11. С. 122–158.
25. Кореневский Д.Г. Коэффициентный критерий и достаточные условия асимптотической устойчивости с вероятностью единица линейных систем стохастических дифференциальных уравнений // Доклады АН СССР. 1986. Т. 290, № 5. С. 1041–1044.
26. Arnold L., Schmalfuss B. Lyapunov's Second Method for Random Dynamical Systems // J. Differential Equations. 2001. Vol. 177. P. 235–265.
27. Friedman A. Stochastic Differential Equations and Applications. Vol. I. New York: Academic Press, 1975. 248 p.
28. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. Москва: Мир, 2003. 407 с.
29. Леваков А.А. Стохастические дифференциальные уравнения. Минск: БГУ, 2009. 231 с.
30. Mao X. Lyapunov's Second Method for Stochastic Differential Equations // Proc. Intern. Conf. Diff. Equations. Berlin, 1999. Vol. 1. P. 136–141.
31. Mao X. Some Contributions to Stochastic Asymptotic Stability and Boundedness via Multiple Lyapunov Functions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2001. Vol. 260. P. 325–340.
32. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. Москва: Наука, 1977. 567 с.
33. Kozin F. On almost sure asymptotic sample properties of diffusion processes defined by stochastic differential equations // Journ. of Math. of Kyoto Univ. 1965. Vol. 4, No. 3. P. 515–528.

References

1. Shumafov M.M., Panesh T.A., Havadzha M.A. On the stochastic stability in the large of solutions of the nonlinear second-order differential equations perturbed by white noise. I // Bulletin of the Adyghe State University. Ser.: Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2021. Iss. 4 (291). P. 11–23. URL: http://vestnik.adygnet.ru
2. Shumafov M.M., Panesh T.A., Havadzha M.A. On the stochastic stability in the large of solutions of the nonlinear second-order differential equations perturbed by white noise. II // Bulletin of the Adyghe State University. Ser.: Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2022. Iss. 1 (296). P. 11–30. URL: http://vestnik.adygnet.ru
3. Shumafov M.M., Panesh T.A., Havadzha M.A. On the stochastic stability in the large of solutions of the nonlinear second-order differential equations perturbed by white noise. III // Bulletin of the Adyghe State University. Ser.: Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2022. Iss. 2 (301). P. 11–38. URL: http://vestnik.adygnet.ru
4. Khas'minskii R.Z. Stochastic Stability of Differential Equations. 2nd ed. Heidelberg, Dordrecht, London, New York: Springer, 2012. 339 p.
5. Kushner H.J. Stochastic Stability and Control. New York: Academ. Press, 1967. 198 p.
6. Arnold L. Stochastic Differential Equations: Theory and Applications. New York: John Wiley and Sons, 1974. 228 p.
7. Mao X. Stochastic Differential Equations and Applications. 2nd ed. Chichester: Horwood Publishing Limited, 2007. 422 p.
8. Gikhman I.I., Skorokhod A.V. Stochastic Differential Equations. Berlin; New York: Springer-Verlag, 1972. 354 p.
9. Lyapunov A.M. The General Problem of the Stability of Motion: Doctoral dissertation. Univ. Kharkov, 1892. 251 p. (English transl.: (1) Stability of Motion. New York; London: Academic Press, 1966. 203 p. (2) The General Problem of the Stability of Motion. London: Taylor & Francis, 1992. 270 p.)
10. Chetaev N.G. Stability of Motion. 3rd ed. Moscow: Nauka, 1965. 207 p. (English transl. of 2nd ed. Oxford: Pergamon Press, 1961.)
11. Bellman R. Stability Theory of Differential Equations. New York; Toronto; London, 1953. DOI: 10.2307/2307494
12. Malkin I.G. Theory of Stability of Motion. 2nd rev. ed. Moscow: Nauka, 1966. 530 p. (English

transl.: Atomic Energy Commission Transl, 1958).
13. Krasovskii N.N. Certain Problems in the Theory of Stability of Motion. Moscow: Fizmatgiz, 1959. 211 p. (English transl.: Stanford: Stanford University Press, 1963).
14. LaSalle J.P., Lefschetz S. Stability by Lyapunov's Direct Methods with Applications. New York: Academic Press, 1961. 168 p.
15. Cesari L. Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations. Berlin; Gottingen; Heidelberg: Springer-Verlag, 1959. P. 1–33.
16. Barbashin E.A. Introduction to Stability Theory. Moscow: Nauka, 1967. 223 p.
17. Demidovich B.P. Lectures on mathematical theory of stability. Moscow: Nauka, 1967. 472 p.
18. Merkin D.R. Introduction to Stability Theory of Motion. Moscow: Nauka, 1971. 312 p.
19. Gelig A.Kh., Leonov G.A., Yakubovich V.A. Stability of Non-Linear Systems with a Non-Unique Equilibrium State. Moscow: Nauka, 1978. 400 p.
20. Levit M.V. Frequency Domain Criterion for Absolute Stochastic Stability of Nonlinear Systems of Ito's Differential Equations // Russian Mathematical Surveys. 1972. Vol. 27, Iss. 4 (166). P. 215–216.
21. Levit M.V., Yakubovich V.A. Algebraic criteria for stochastic stability of linear systems with parametric white-noise-like action // Applied Mathematics and Mechanics. 1972. Iss. 1. P. 143–146.
22. Pakshin P.V. Stability of one class of nonlinear stochastic systems // Automation and Remote Control. 1977. Iss. 4. P. 27–36.
23. Pakshin P.V. Exponential Stability of a Class of Nonlinear Stochastic Systems // Automation and Remote Control. 1980. Iss. 2. P. 65–71.
24. Pakshin P.V., Ugrinovskiy V.A. Stochastic problems of absolute stability // Automation and Remote Control. 2006. Iss. 11. P. 122–158.
25. Korenevskiy D.G. Coefficient criterion and sufficient conditions for asymptotic stability with probability one of linear systems of Ito stochastic differential equations // Proceedings of the USSR Academy of Sciences. 1986. Vol. 290, No. 5. P. 1041–1044.
26. Arnold L., Schmalfuss B. Lyapunov's Second Method for Random Dynamical Systems // J. Differential Equations. 2001. Vol. 177. P. 235–265.
27. Friedman, A. Stochastic Differential Equations and Applications. Vol. I. Academic Press, 1975. 248 p.
28. Oksendal B. Stochastic Differential Equations. Berlin: Springer, 2007. 332 p.
29. Levakov A.A. Stochastic Differential Equations. Minsk: BGU, 2009. 231 p.
30. Mao X. Lyapunov's Second Method for Stochastic Differential Equations // Proc. Intern. Conf. Diff. Equations. Berlin, 1999. Vol. 1. P. 136–141.
31. Mao X. Some Contributions to Stochastic Asymptotic Stability and Boundedness via Multiple Lyapunov Functions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2001. Vol. 260. P. 325–340.
32. Gikhman I.I., Skorokhod A.V. Introduction to the Theory of Random Processes. Philadelphia: Saunders, 1969. 516 p.
33. Kozin F. On almost sure asymptotic sample properties of diffusion processes defined by stochastic differential equations // Journ. of Math. of Kyoto Univ. 1965. Vol. 4, No. 3. P. 515–528.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 25.07.2022; одобрена после рецензирования 26.08.2022; принята к публикации 27.08.2022.

The article was submitted 25.07.2022; approved after reviewing 26.08.2022; accepted for publication 27.08.2022.

© М.М. Шумафов, Т.А. Панеш, М.А. Хаваджа, 2022