Научная статья
УДК 517.925
ББК 22.161.6
У 95
DOI: 10.53598/2410-3225-2022-3-306-34-38

Элементарное доказательство одной теоремы об отсутствии циклов, окружающих состояние равновесия типа «узел»

(*Рецензирована*)

Дамир Салихович Ушхо

Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия, damirubych@mail.ru

Аннотация. *Дано новое доказательство теоремы о существовании или отсутствии замкнутых траекторий, окружающих отдельно взятое состояние равновесия типа «узел».*

Ключевые слова: *автономная динамическая система на плоскости, замкнутая траектория, индекс Пуанкаре, состояние равновесия, узел*

Original Research Paper

An elementary proof of a theorem about the absence of cycles encircling the equilibrium state of the node-type

Damir S. Ushkho

Adyghe State University, Maikop, Russia, damirubych@mail.ru

Abstract: *In the paper, we give a new proof of the theorem on the existence or absence of closed trajectories encircling a single equilibrium state of the "node" type.*

Keywords: *planar autonomous dynamical system, closed trajectory, Poincare index, state of equality, node*

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = X(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Y(x, y) \end{cases} \tag{1}$$

с аналитическими на всей фазовой плоскости правыми частями.

Замкнутая траектория системы (1) имеет индекс Пуанкаре, равный единице [1]. Поэтому она может окружать отдельно взятое состояние равновесия типа не только «фокус» и «центр», но и «узел».

Так, например, система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + 2x(x^2 + y^2 - 1), \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 5y(x^2 + y^2 - 1) \end{cases}$$

имеет предельный цикл $x^2 + y^1 - 1 = 0$, окружающий единственное состояние равновесия $O(0,0)$ типа «простой устойчивый узел».

Таким образом, правомерно поставить вопрос о существовании или отсутствии

замкнутых траекторий, окружающих отдельно взятое состояние равновесия типа «узел». Данной проблеме посвящена статья [2], в которой доказана

Теорема 1. *Если состояние равновесия* $O(0,0)$ *системы*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + \sum\limits_{i+j=n} a_{ij} x^i y^j, \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy + \sum\limits_{i+j=n} b_{ij} x^i y^j, \end{cases} \tag{2}$$

где $n \in N$, n *– четное, имеет действительные характеристические корни, то точку* $O(0,0)$ *не окружает замкнутая траектория этой системы*.

Доказательство теоремы проводится путем перехода к полярным координатам.

Цель данной заметки – указать иное, на наш взгляд, элементарное, доказательство теоремы 1.

Определение 1. Пусть A и B – отличные от состояний равновесия системы (1) точки на прямой l, не являющейся инвариантной, $\vec{v}(A)(\vec{v}(B))$ – вектор поля системы (1) в точке A (B). При этом начало вектора $\vec{v}(A)(\vec{v}(B))$ совмещено с точкой A (B). Если концы векторов $\vec{v}(A)$, $\vec{v}(B)$ расположены в одной и той же полуплоскости (в разных полуплоскостях) относительно прямой l, то точки A и B назовем согласованными (несогласованными) на прямой l.

Очевидно, в силу непрерывности векторного поля системы (1) между двумя несогласованными точками прямой l расположено хотя бы одно состояние равновесия системы (1) или хотя бы один контакт.

Определение 2. Точка K, расположенная на прямой l, называется контактом, если эта прямая касается некоторой траектории системы (1) в точке K.

Замечание 1. Доказательство выпуклости замкнутой траектории квадратичной системы основано на понятии «несогласованные точки» (см. статью [3]).

Лемма 1. *Пусть* $O(0,0)$ *– состояние равновесия системы* (1), *где выполняется условие* $(X,Y)=1$. *Тогда эта система не имеет замкнутой траектории, окружающей точку* $O(0,0)$, *если выполняется одно из условий*:

$$X(0,y)Y(x,0) \equiv 0; \tag{3}$$

$$X(0,y) > 0 \ \ \textit{при} \ \ y \neq 0 \ \ (\textit{или} \ \ X(0,y) < 0 \ \ \textit{при} \ \ y \neq 0); \tag{4}$$

$$Y(x,0) > 0 \ \ \textit{при} \ \ x \neq 0 \ \ (\textit{или} \ \ Y(x,0) < 0 \ \ \textit{при} \ \ x \neq 0). \tag{5}$$

Доказательство. При выполнении (3) через состояние равновесия $O(0,0)$ проходит инвариантная прямая $x=0$ или $y=0$. Поэтому замкнутая траектория не может окружать точку $O(0,0)$. Если имеет место условие (4), то $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)_{x=0} \neq 0$. Отсюда следует, что точки прямой $x=0$, отличные от $O(0,0)$, согласованы. Это свидетельствует об отсутствии замкнутой траектории вокруг точки $O(0,0)$. К такому же выводу приходим и в случае выполнения условия (5).

Лемма доказана.

В работе [4] доказана

Лемма 2. *Если* $O(0,0)$ *– сложное состояние равновесия системы* (1), *то посредством неособенного линейного преобразования фазовых переменных она может*

быть приведена к системе

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = V(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = W(x, y), \end{cases} \tag{6}$$

которая удовлетворяет хотя бы одному из условий:

$$V'_x(0,0) = V'_y(0,0) = 0\,; \tag{7}$$

$$W'_x(0,0) = W'_y(0,0) = 0\,. \tag{8}$$

Доказательство теоремы 1. Отметим, что априори считается выполненным условие

$$|a| + |b| + |c| + |d| > 0\,, \tag{9}$$

ибо в противном случае через точку $O(0,0)$ проходит хотя бы одна инвариантная прямая.

В самом деле, если неравенство (9) не выполняется, то $y = kx$ – инвариантная прямая для системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i+j=n} a_{ij} x^i y^j\,, \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i+j=n} b_{ij} x^i y^j \end{cases}$$

тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$b_{n,0} + b_{n-1,1}k + b_{n-2,2}k^2 + \ldots + b_{0,n}k^n = k(a_{n,0} + a_{n-1,1}k + a_{n-2,2}k^2 + \ldots + a_{0,n}k^n)\,. \tag{10}$$

Равенство (10) представляет собой уравнение $n+1$-ой степени относительно k. Если $a_{0,n} \neq 0$, то уравнение (10) как уравнение нечетной степени (n – четное число) имеет хотя бы один действительный корень, если $a_{0,n} = 0$, то $x = 0$ – инвариантная прямая системы (2). Таким образом, если не выполняется (9), то через точку $O(0,0)$ проходит, по меньшей мере, одна инвариантная прямая. Следовательно, у системы (2) нет замкнутой траектории, окружающей начало координат.

При выполнении (9) состояние равновесия $O(0,0)$ может быть простым или сложным. Пусть $O(0,0)$ – сложное состояние равновесия системы (2). Согласно лемме 2, не сужая общности, рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i+j=n} a_{ij} x^i y^j\,, \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy + \sum\limits_{i+j=n} b_{ij} x^i y^j\,,\ n - \textit{четное число}. \end{cases} \tag{11}$$

Если $a_{0n} = 0$, то выполняется условие (3), а при $a_{0n} \neq 0$ выполняется условие (4) леммы 1. Поэтому точку $O(0,0)$ не окружает замкнутая траектория системы (11).

Далее рассмотрим случай, когда $O(0,0)$ – простое состояние равновесия системы (2), то есть случай, когда корни характеристического уравнения этого состояния равновесия действительны и отличны от нуля.

Пусть λ_1 и λ_2 – различные корни характеристического уравнения, и $\lambda_1\lambda_2 > 0$.

Здесь сознательно не рассматривается случай $\lambda_1\lambda_2 < 0$, так как в этом случае $O(0,0)$ – простое седло [1], и оно не может быть окружено замкнутой траекторией.

Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то система (2) может быть приведена к системе [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \lambda_1 x + \sum\limits_{i+j=n} \alpha_{ij} x^i y^j, \\ \dfrac{dy}{dt} = \lambda_2 y + \sum\limits_{i+j=n} \beta_{ij} x^i y^j. \end{cases} \tag{12}$$

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ – двукратный корень характеристического уравнения, то системе (2) можно придать вид системы [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \lambda\ x + \sum\limits_{i+j=n} \alpha_{ij} x^i y^j, \\ \dfrac{dy}{dt} = \mu x + \lambda\ y + \sum\limits_{i+j=n} \beta_{ij} x^i y^j, \end{cases} \tag{13}$$

где μ может быть равным нулю или отличным от него.

В системах (12) и (13) при $\alpha_{0n} = 0$ $x = 0$ – инвариантная прямая, а при $\alpha_{0n} \neq 0$ точки прямой $x = 0$, за исключением точки $O(0,0)$, являются согласованными. Таким образом, системы (12) и (13) удовлетворяют лемме 1, и нет у системы (2) траекторий, окружающих узел $O(0,0)$.

Теорема доказана.

Следствие. Состояние равновесия типа «узел» квадратичной системы не окружает замкнутая траектория.

Замечание 2. Вопрос о существовании или отсутствии предельных циклов, окружающих узел $O(0,0)$ системы (2), изучается в монографии [5] как в случае четного, так и в случае нечетного n.

Примечания

1. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. Москва: Наука, 1966. 568 с.

2. Воробьев А.П. К вопросу о циклах вокруг особой точки типа «узел» // Доклады академии наук БССР. 1960. Т. 4, № 9. С. 369–371.

3. Тун-Цзинь-чжу. Расположение предельных циклов системы $\dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{0\le i+j\le 2} a_{ij} x^i y^j$, $\dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{0\le i+j\le 2} b_{ij} x^i y^j$ // Периодический сборник переводов иностранных статей. Математика. 1962. Т. 6, № 2. С. 150–168.

4. Тлячев В.Б., Ушхо А.Д., Ушхо Д.С. Состояния равновесия и смежные вопросы теории плоских полиномиальных векторных полей // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2020. № 1. С. 30–54.

5. Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П. Нелинейные колебания в системах второго порядка. Минск: Изд-во БГУ, 1982. 208 с.

References

1. Qualitative theory of second-order dynamical systems / A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon, A.G. Maier. New York: John Wiley and Sons, 1973. 568 p.

2. Vorobyev A.P. On the issue of cycles around a singular point of the “knot” type // Reports of Academy of sciences of BSSR. 1960. Vol. 4, No. 9. P. 369–371.

3. Tung Chin-Chu. Positions of limit-cycles of the system $\frac{dx}{dt} = \sum_{0 \le i+j \le 2} a_{ij} x^i y^j$, $\frac{dy}{dt} = \sum_{0 \le i+j \le 2} b_{ij} x^i y^j$ // The periodic collection of translations of foreign articles. Mathematics. 1962. Vol. 6, No. 2. P. 150–168.

4. Tlyachev V.B., Ushkho A.D., Ushkho D.S. Equilibrium states and adjacent questions of the plane polynomial vector fields theory // Differential Equations and Control Processes. 2020. No. 1. P. 30–54.

5. Amelkin V.V., Lukashevich N.A., Sadovsky A.P. Nonlinear oscillations in second-order systems. Minsk: BSU Publishing House, 1982. 208 p.

Статья поступила в редакцию 05.07.2022; одобрена после рецензирования 05.08.2022; принята к публикации 06.08.2022.

The article was submitted 05.07.2022; approved after reviewing 05.08.2022; accepted for publication 06.08.2022.

© Д.С. Ушхо, 2022