Научная статья
УДК 517.925
ББК 22.161.6
У 95
DOI: 10.53598/2410-3225-2022-3-306-39-49

О предельных циклах кубической системы, имеющей четыре инвариантных прямых

(*Рецензирована*)

Адам Дамирович Ушхо

Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия, uschho76@mail.ru

Аннотация. *Представлены достаточные условия существования у кубической автономной дифференциальной системы, имеющей четыре инвариантных прямых, не более одного предельного цикла. Приведены примеры системы с четырьмя инвариантными прямыми и предельным циклом, расположенным как внутри, так и вне параллелограмма, образованного инвариантными прямыми.*

Ключевые слова: *кубическая автономная дифференциальная система, инвариантная прямая, предельный цикл, внеузловая точка, негрубый фокус*

Original Research Paper

On limit cycles of a cubic system having four invariant lines

Adam D. Ushkho

Adyghe State University, Maikop, Russia, uschho76@mail.ru

Abstract. *Sufficient conditions are presented for the existence of no more than one limit cycle in the cubic autonomous differential system having four invariant lines. Examples are given of a system with four invariant lines and a limit cycle located both inside and outside the parallelogram formed by invariant lines.*

Keywords: *cubic autonomous differential system, invariant line, limit cycle, out-of-node point, non-rough focus*

В качественной теории автономных дифференциальных систем второго порядка важную роль играет решение вопроса о сосуществовании изолированных периодических решений и инвариантных кривых. Так, в работе [1] доказано отсутствие предельных циклов системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a_{10}x + a_{01}y + a_{00}), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(b_{10}x + b_{01}y + b_{00}), \end{cases}$$

имеющей инвариантные прямые $x = 0,\ y = 0.$ Авторы заметок [2, 3] построили фазовый портрет системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{3} a_{ij}x^i y^j \equiv P_3(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{3} b_{ij}x^i y^j \equiv Q_3(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

из траекторий которой состоят эллипс и гипербола. При этом было установлено, что эта система не имеет предельных циклов. В статье [4] доказано, что при наличии у системы (1) предельного цикла в виде эллипса, а также двух параллельных между собой инвариантных прямых она является моноцикличной. Авторы статьи [5], примыкающей по своему содержанию к упомянутой работе [4], доказали, что система (1) не имеет изолированных периодических решений, если из ее траекторий состоят эллипс и две пересекающиеся прямые. Здесь же построен пример системы (1), имеющей алгебраический предельный цикл-эллипс и одну инвариантную прямую, но не являющейся моноцикличной.

Впервые в работе [6] доказано, что дифференциальное уравнение фазовых траекторий системы (1) может иметь любое число интегральных прямых от одного до восьми. Из [7] следует, что система (1) не имеет изолированных периодических решений, если из ее траекторий состоят пять прямых. Поэтому естественным образом возникает вопрос: при наличии какого наибольшего числа инвариантных прямых система (1) допускает предельные циклы?

Решению этой проблемы посвящена статья [8], в которой доказано, что необходимым условием существования предельного цикла системы (1), имеющей четыре инвариантных прямых, является то, что эти прямые образуют параллелограмм. При этом ошибочно утверждается, что предельный цикл, если он существует, непременно расположен внутри параллелограмма.

В настоящей заметке находятся достаточные условия существования у системы (1), имеющей четыре инвариантных прямых, не более одного предельного цикла. Приводятся примеры системы (1) с четырьмя инвариантными прямыми и предельным циклом, расположенным как внутри, так и вне параллелограмма, образованного инвариантными прямыми.

Пусть система (1) имеет четыре инвариантных прямых, образующих параллелограмм. Тогда посредством аффинного преобразования переменных x и y она может быть приведена к системе

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(x-1)(Ax+By+C), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(y-1)(Mx+Ny+K), \end{cases} \tag{2}$$

где $BM \neq 0,\ AN - BM \neq 0.$

Наряду с системой (2) рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = \dfrac{Ax+By+C}{y(y-1)} \equiv F(x,y), \\ \dfrac{dy}{d\tau} = \dfrac{Mx+Ny+K}{x(x-1)} \equiv G(x,y), \end{cases} \tag{3}$$

где $d\tau = xy(x-1)(y-1)dt.$

Замкнутые траектории систем (2) и (3) совпадают, разве что направления на траекториях этих систем могут быть противоположными [9].

Следуя работе [10], назовем узловой точкой состояние равновесия системы (2), через которое проходят две инвариантные прямые $l^0 \in M^0$ и $l^\infty \in M^\infty$, где $M^0 = \{y=0,\ y-1=0\},\ M^\infty = \{x=0,\ x-1=0\}.$

Состояние равновесия системы (2), не являющееся узловой точкой, будем называть внеузловой точкой. Для внеузловых точек введем следующие обозначения:

V^0 – внеузловая точка, расположенная на инвариантной прямой $l^0 \in M^0$;

V^{∞} – внеузловая точка, расположенная на инвариантной прямой $l^{\infty} \in M^{\infty}$;

$V = L^0 \cap L^{\infty}$ – внеузловая точка, через которую не проходит инвариантная прямая из множества $M^0 \cup M^{\infty}$.

Здесь $L^0 : Mx + Ny + K = 0, \quad L^{\infty} : Ax + By + C = 0.$

Согласно введенным обозначениям, через внеузловую точку V^0 (V^{∞}) проходит изоклина бесконечности L^{∞} (изоклина нуля L^0), а замкнутая траектория системы (2) может окружать только внеузловую точку V-типа $V = L^0 \cap L^{\infty}$.

Замечание 1. Для удобства дальнейшего изложения систему (3) будем называть системой, порожденной системой (2).

Теорема 1. *Пусть система* (3) *удовлетворяет одному из условий*:

1) $AN = 0$; 2) $C = K = 0$; 3) *каждая из главных изоклин* L^0 *и* L^{∞} *проходит через две узловые точки. Тогда эта система не имеет предельных циклов*.

Доказательство. Если выполняется условие 2), то система (2) не имеет внеузловой точки V-типа, следовательно, у этой системы не может быть замкнутой траектории. Для доказательства теоремы в случае выполнения условий 1) и 3) обратимся к системе, порожденной системой (2). Если выполняется условие $A = N = 0$, то выражение

$$F'_x(x, y) + G'_y(x, y) = \frac{A}{y(y-1)} + \frac{N}{x(x-1)} \tag{4}$$

тождественно равно нулю, а значит, система (3) консервативна в областях возможного расположения внеузловой точки V-типа. Поэтому система не имеет изолированных замкнутых траекторий. При выполнении одного из условий $A = 0, \ N \neq 0$ и $A \neq 0, \ N = 0$ выражение (4) знакопостоянно в областях возможного расположения внеузловой точки V-типа. Поэтому, согласно признаку Бендиксона [9], система не имеет не только предельных циклов, но и любых замкнутых траекторий в открытых областях, на которые разбивают всю фазовую плоскость инвариантные прямые множества $M^0 \cup M^{\infty}$.

Пусть выполняется условие 3). Для определенности полагаем, что L^{∞} проходит через узловые точки $(0,1)$ и $(1,0)$, а L^0 – через узловые точки $(0,0)$ и $(1,1)$. Тогда система (2) имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(x-1)(-Cx - Cy + C), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(y-1)(-Nx + Ny), \ \ CN \neq 0. \end{cases} \tag{5}$$

Внеузловой точкой V-типа системы (5) является точка $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Перенося начало координат системы (5) в эту точку и сохраняя обозначения фазовых переменных, получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{C}{4}x + \dfrac{C}{4}y - Cx^3 - Cx^2 y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{N}{4}x - \dfrac{N}{4}y - Nxy^2 + Ny^3. \end{cases} \tag{6}$$

Определитель матрицы линейного приближения системы (6) равен

$$\Delta = \frac{-CN}{8}. \tag{7}$$

Из (7) следует, что при $CN > 0$ начало координат $(0,0)$ системы (6) является простым седлом, следовательно, циклов нет у системы. Если $CN < 0$, то дивергенция векторного поля системы, порожденной системой (5), знакопостоянна внутри квадрата $W = \{(x, y) / 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. По признаку Бендиксона [9] система не имеет замкнутых траекторий. Теорема доказана.

Изобразим на рисунке 1 разбиение фазовой плоскости на области возможного расположения изолированных периодических решений системы (2).

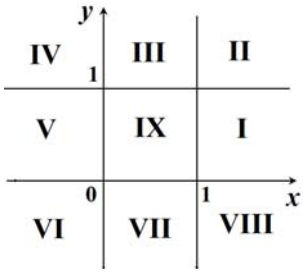

Рис. 1. Нумерация открытых областей возможного расположения предельных циклов системы (2)
Fig. 1. . Open areas numbers of a possible location of limit cycles in system (2)

Приведем примеры систем (2), имеющих четыре инвариантных прямых и предельный цикл.

Пример 1 [8]. $\forall \mu \in R$ система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2\left(1 - 4x^2\right)\left[(3 + 2\mu)x - 8y\right], \\ \dfrac{dy}{dt} = \left(3 + 8y - 16y^2\right)(3x - 2y) \end{cases} \tag{8}$$

имеет инвариантные прямые: $x - 0{,}5 = 0$, $x + 0{,}5 = 0$, $y + 0{,}25 = 0$, $y - 0{,}75 = 0$.

Начало координат системы (8) является единственной внеузловой точкой V-типа, и она расположена в области IX. При сколь угодно малых положительных значениях μ простой неустойчивый фокус $(0,0)$ окружает хотя бы один грубый устойчивый предельный цикл.

Пример 2. $\forall \mu \in R$ система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4(x-1)(x+1)\left[(1+\mu)x - 4y\right], \\ \dfrac{dy}{dt} = (y+1)(y+2)(4x - 2y) \end{cases} \tag{9_μ}$$

имеет инвариантные прямые: $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $y + 1 = 0$, $y + 2 = 0$. Внеузловой точкой V-типа системы (9_μ) является начало координат $(0,0)$. Эта точка является негрубым фокусом системы (9_0).

В самом деле, характеристические числа состояния равновесия $(0,0)$ системы (9_0) чисто мнимые, а именно $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{7}i$.

Непосредственные вычисления показывают, что третья фокусная величина $\alpha_3(0,0) = -\dfrac{107\pi}{112\sqrt{7}} < 0$. Согласно монографии [11], точка $(0,0)$ – устойчивый негрубый фокус системы (9_0). При переходе к сколь угодно малым положительным значениям

μ негрубый фокус превращается в грубый фокус противоположной устойчивости. При этом из негрубого фокуса рождается устойчивый предельный цикл, окружающий точку (0,0).

Таким образом, система (9_μ) при сколь угодно малых положительных значениях μ имеет простой предельный цикл, окружающий простой неустойчивый фокус.

В результате параллельного переноса и преобразования подобия система (9_μ) приводится к системе (обозначения фазовых переменных оставляем неизменными):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(x-1)\left[(-16-16\mu)x + 32y - 56 + 8\mu\right], \\ \dfrac{dy}{dt} = y(y-1)(8x-2y). \end{cases} \tag{10}$$

Для системы (10) внеузловая точка $V\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ является неустойчивым простым фокусом, окруженным простым устойчивым предельным циклом, разумеется, при достаточно малых положительных значениях μ.

Как видим, $A = -16 - 16\mu < 0$, $N = -2 < 0$, то есть имеет место случай $AN > 0$, а внеузловая точка $V\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ расположена в области III.

Негрубый фокус $V\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ системы (10) или, что то же самое, точка (0,0) системы (9_0) не окружает предельный цикл. Действительно, функции $\alpha(x,y) = \dfrac{-10x + 7y - 3}{7(y^2 + 3y + 2)}$ и $\beta(x,y) = \dfrac{3x+3}{7(x^2-1)}$ суть решения уравнения

$$F_x'(x,y) + G_y'(x,y) = \alpha(x,y)G(x,y) - \beta(x,y)F(x,y),$$

где $F(x,y), G(x,y)$ – правые части первого и второго уравнения соответственно системы, порожденной системой (9_0).

Так как выражение $D(\alpha,\beta) = \alpha_x' + \beta_y' = -\dfrac{10}{7(y^2+3y+2)}$ отрицательно в области возможного расположения предельных циклов, то в силу теоремы 4.4 [12] система (9_0) может иметь разве что один простой устойчивый предельный цикл. Поэтому он не может окружать устойчивый фокус.

В связи с рассмотренным примером 2 следует отметить, что квадратичная система при наличии негрубого фокуса и инвариантной прямой не имеет предельных циклов [13].

Найдем некоторые достаточные условия существования у системы (2) не более одного предельного цикла.

Рассмотрим внеузловую точку V-типа системы (2) $V_0(x_0, y_0)$, где

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{KB - CN}{AN - MB}, \\ y_0 = \dfrac{MC - AK}{AN - MB}. \end{cases} \tag{11}$$

В результате переноса начала координат системы (2) в точку V_0 получим систему (обозначения фазовых переменных x, y сохранены):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (x + x_0)(x + x_0 - 1)(Ax + By), \\ \dfrac{dy}{dt} = (y + y_0)(y + y_0 - 1)(Mx + Ny). \end{cases} \tag{12}$$

Определитель матрицы линейного приближения системы (12) равен

$$\Delta = x_0 y_0 (x_0 - 1)(y_0 - 1)\overline{\Delta}, \tag{13}$$

где $\overline{\Delta} = AN - BM$, x_0, y_0 следует заменить по формулам (11).

Из (13) следует, что $V_0(x_0, y_0)$ – седло, если выполнено одно из условий:

$$\begin{cases} AN - BM > 0, \\ (KB - CN)(MC - AK)(KB - CN - AN + BM)(MC - AK - AN + BM) < 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} AN - BM < 0, \\ (KB - CN)(MC - AK)(KB - CN - AN + BM)(MC - AK - AN + BM) > 0. \end{cases}$$

Поэтому, если у системы (2) есть предельный цикл, то по необходимости выполняется одно из условий:

$$\begin{cases} AN - BM > 0, \\ (KB - CN)(MC - AK)(KB - CN - AN + BM)(MC - AK - AN + BM) > 0 \end{cases} \tag{14}$$

и

$$\begin{cases} AN - BM < 0, \\ (KB - CN)(MC - AK)(KB - CN - AN + BM)(MC - AK - AN + BM) < 0. \end{cases} \tag{15}$$

При выполнении (14) предельный цикл может окружать внеузловую точку V-типа, расположенную в одной из областей II, IV, VI, VIII, IX, а при выполнении 15 – в одной из областей I, III, IV, VII.

Непосредственными вычислениями можно убедиться в том, что функции $\alpha(x, y) = \dfrac{rx + sy}{y^2 - y}$, $\beta(x, y) = \dfrac{mx + ny}{x^2 - x}$ являются решениями уравнения

$$F_x'(x, y) + G_y'(x, y) = \alpha(x, y)G(x, y) - \beta(x, y)F(x, y) \tag{15'}$$

в том и только в том случае, когда выполняются условия

$$\begin{cases} r = \dfrac{A(m+1)}{M}, \\ n = \dfrac{N(s-1)}{B}, \\ ANB(m+1) + M^2Bs - MB^2m - ANM(s-1) = 0, \\ AK(m+1) - MCm + AM = 0, \\ KBs - CN(s-1) + BN = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Если выражение

$$D(\alpha, \beta) = \alpha_x' + \beta_y' = \frac{A(m+1)}{M}\frac{1}{y^2 - y} + \frac{N(s-1)}{B}\frac{1}{x^2 - x} \tag{17}$$

знакопостоянно, то согласно [12], система (2) имеет не более одного предельного цикла, окружающего внеузловую точку V-типа $V_0(x_0, y_0)$.

Из изложенного с учетом условий теоремы 1 следует

Теорема 2. *Если выполняются условия*

$$\begin{cases} BM < AN < 0, \\ (KB-CN)(MC-AK)(KB-CN-AN+BM)(MC-AK-AN+BM) > 0, \\ (m+1)(s-1) \geq 0, |m+1|+|s-1| > 0, \\ ANB(m+1)+M^2Bs-MB^2m-ANM(s-1)=0, \\ AK(m+1)-MCm+AM=0, \\ KBs-CN(s-1)+BN=0 \end{cases} \tag{18}$$

или

$$\begin{cases} 0 < AN < BM, \\ (KB-CN)(MC-AK)(KB-CN-AN+BM)(MC-AK-AN+BM) < 0, \\ (m+1)(s-1) \leq 0, |m+1|+|s-1| > 0, \\ ANB(m+1)+M^2Bs-MB^2m-ANM(s-1)=0, \\ AK(m+1)-MCm+AM=0, \\ KBs-CN(s-1)+BN=0, \end{cases} \tag{19}$$

то система (2) *имеет не более одного, причем грубого предельного цикла, окружающего единственную внеузловую точку* V*-типа, расположенную только в одной из областей* II, IV, VI, VIII, IX (I, III, V, VII) *при выполнении условий* 18 ((19)).

Пример 3. Система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(x-1)(-x-2y+3), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(y-1)(x+y-1) \end{cases} \tag{20}$$

удовлетворяет условиям (18) теоремы 2 ($m=0, s=1$) и имеет внеузловую точку V-типа $V_1(-1,2)$. Третья фокусная величина точки V_1 равна $\alpha_3(V_1) = -\dfrac{\pi}{16} < 0$. Согласно монографии [11], V_1 – устойчивый негрубый фокус. (Фазовый портрет см. на рис. 2.)

Величина $D(\alpha,\beta) = -\dfrac{1}{y(y-1)} < 0$ (см. (17)), и по теореме 4.4 [12] предельный цикл, если существует, то является грубым устойчивым. Поэтому система (20) ациклична.

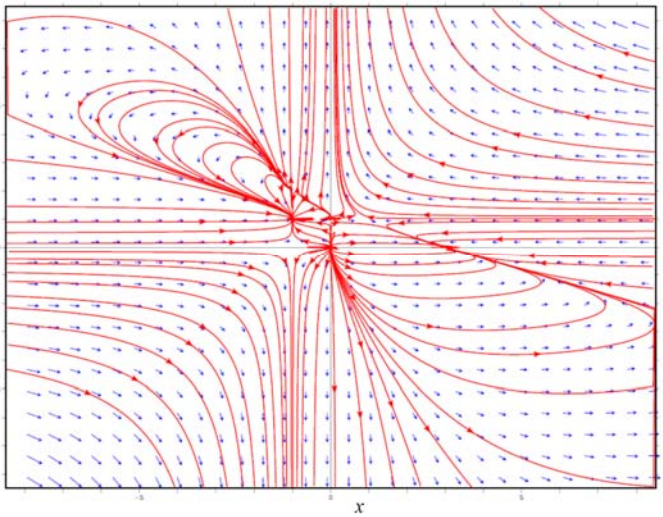

Рис. 2. Фазовый портрет системы (20)
Fig. 2. Phase portrait of the system (20)

Пример 4. Система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(x-1)(-x-y+1), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(y-1)(2x+y-4) \end{cases} \tag{21}$$

удовлетворяет условиям (18) теоремы 2 ($m=1, s=0$) и имеет внеузловую точку V-типа $V_2(3,-2)$, расположенную в области VIII. Третья фокусная величина точки $V_2(3,-2)$ равна $\alpha_3(V_2) = \dfrac{\pi}{24} > 0$, то есть неустойчивый негрубый фокус [11]. Вместе с тем $D(\alpha,\beta) = \dfrac{1}{x(x-1)} > 0$, и по теореме 4.4 [12] предельный цикл, окружающий V_2, если он существует, то является неустойчивым. Поэтому система (21) ациклична. (Фазовый портрет см. на рис. 3.)

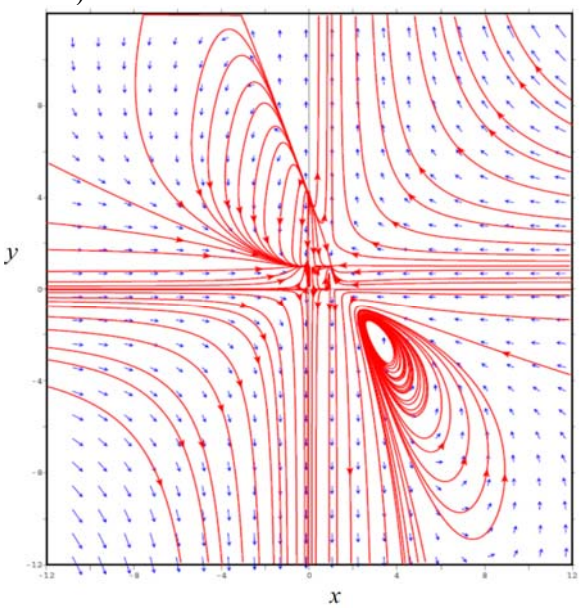

Рис. 3. Фазовый портрет системы (21)
Fig. 3. Phase portrait of the system (21)

Пример 5. Система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(x-1)(-2x-6y-6), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(y-1)(x+2y+1) \end{cases} \tag{22}$$

удовлетворяет условиям (18) теоремы 2 ($m=1, s=4$) и имеет внеузловую точку $V_3(3,-2)$. Как показывают вычисления, третья фокусная величина точки V_3 равна $\alpha_3(V_3) = -\dfrac{5\pi}{72\sqrt{2}} < 0$, то есть V_3 – устойчивый негрубый фокус.

$\alpha(x,y) = \dfrac{-4x+4y}{y^2-y}$, $\beta(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2-x}$ – решения функционального уравнения $(15')$, поэтому $D(\alpha,\beta) = -\dfrac{4}{y^2-y} - \dfrac{1}{x^2-x} < 0$ в области VIII. Отсюда следует, что система (22) также ациклична. (Фазовый портрет см. на рис. 4.)

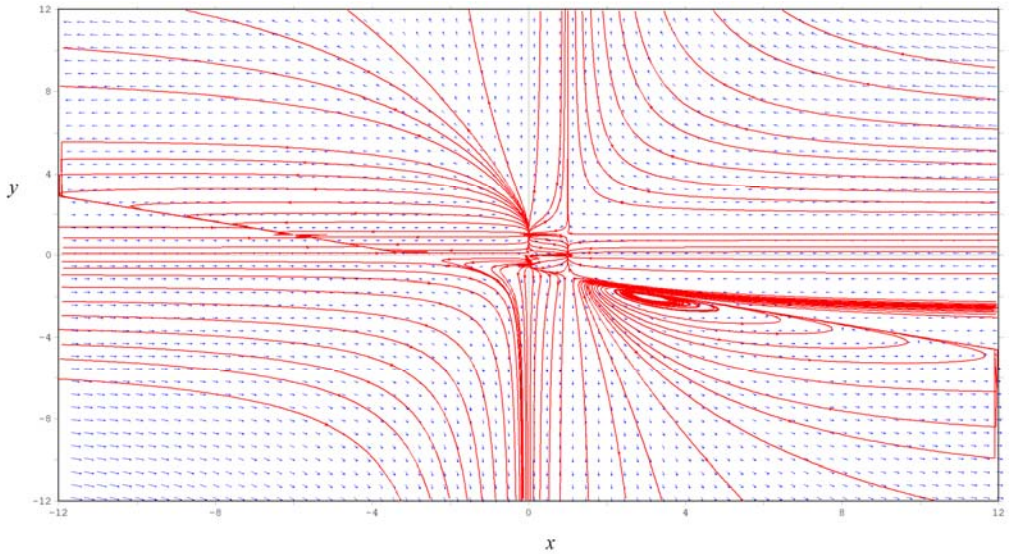

Рис. 4. Фазовый портрет системы (22)
Fig. 3. Phase portrait of the system (21)

Пример 6. Система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(x-1)\left(x+y-\dfrac{2}{5}\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(y-1)(2x+y-1) \end{cases} \tag{23}$$

удовлетворяет условиям теоремы 2 ($s=1, m=5$) и $V_4\left(\dfrac{3}{5}, -\dfrac{1}{5}\right)$ – внеузловая точка, являющаяся неустойчивым негрубым фокусом ($\alpha_3(V_4) = \dfrac{\pi}{8} > 0$). Величина (17) задана формулой $D(\alpha,\beta) = \dfrac{3}{y^2 - y} > 0$ в области VIII расположения точки V_4. Согласно [11] и [12], негрубый фокус V_4 не окружает предельный цикл, то есть система (23) ациклична. (Фазовый портрет см. на рис. 5.)

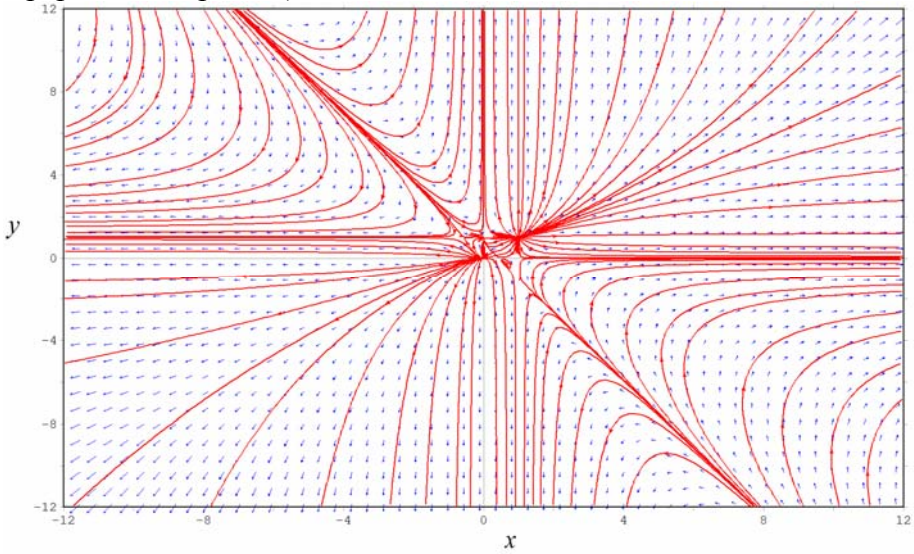

Рис. 5. Фазовый портрет системы (23)
Fig 5. Phase portrait of the system (23)

Замечание 2. Все внеузловые точки системы (2), удовлетворяющие условиям теоремы 2, являются негрубыми фокусами в силу равенства $(15')$.

Примечания

1. Баутин Н.Н. О периодических решениях одной системы дифференциальных уравнений // Прикладная математика и механика. 1954. Т. 18, № 1. С. 128.

2. Белевец П.С., Валеева Р.Т. Об одном классе динамических систем с двумя частными алгебраическими интегралами // Волжский математический сборник. 1973. Вып. 16. С. 52–54.

3. Белевец П.С., Валеева Р.Т. Качественная картина в целом одного класса динамических систем // Волжский математический сборник. 1973. Вып. 16. С. 55–60.

4. Столяров В.В. О предельных циклах и ограниченности одной динамической системы // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, № 10. С. 1823–1824.

5. Ушхо Д.С., Тешев Р.М. Предельные циклы одной кубической дифференциальной системы // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер.: Естественно-математические и технические науки. 2002. Вып. 3–4 (7–8). С. 139–143. URL: http://vestnik.adygnet.ru

6. Любимова Р.А. Об одном дифференциальном уравнении с интегральными прямыми // Дифференциальные и интегральные уравнения. 1977. Вып. 1. С. 19–22.

7. Горбузов В.Н., Тыщенко В.Ю. Частные интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Математический сборник. 1992. Т. 183, № 3. С. 76–94.

8. Ушхо Д.С., Ушхо А.Д. О сосуществовании предельных циклов и линейных частных интегралов кубических дифференциальных систем на плоскости // Труды ФОРА. 2004. № 9. С. 20–24. URL: http://fora.adygnet.ru

9. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. Москва: Наука, 1976. 496 с.

10. Об одном методе исследования числа инвариантных прямых полиномиальных векторных полей n-ой степени / Д.С. Ушхо, А.Е. Артисевич, Н.А. Лобода, А.А. Панеш // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер.: Естественно-математические и технические науки. 2018. Вып. 4 (231). С. 15–27. URL: http://vestnik.adygnet.ru

11. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. Москва: Наука, 1967. 488 с.

12. Отроков Н.Ф. Аналитические интегралы и предельные циклы. Горький: Волго-Вятское кн. изд-во, 1972. 216 с.

13. Черкас Л.А. Об отсутствии предельных циклов одного уравнения, имеющего негрубый фокус // Дифференциальные уравнения. 1970. Т. 6, № 5. С. 779–783.

References

1. Bautin N.N. On periodic solutions of one system of differential equations // Applied Mathematics and Mechanics. 1954. Vol. 18, No. 1. P. 128.

2. Belevets P.S., Valeeva R.T. On one class of dynamical systems with two partial algebraic integrals // Volga Mathematical Collection. 1973. Iss. 16. P. 52–54.

3. Belevets P.S., Valeeva R.T. A qualitative picture of a whole class of dynamical systems // Volga Mathematical Collection. 1973. Iss. 16. P. 55–60.

4. Stolyarov V.V. On limiting cycles and the limitation of one dynamical system // Differential Equations. 1989. Vol. 25, No. 10. P. 1823–1824.

5. Ushkho D.S., Teshev R.M. Limit cycles of one cubic differential system // Bulletin of the Adyghe State University. 2002. Iss. 3–4 (7–8). P. 139–143. URL: http://vestnik.adygnet.ru

6. Lyubimova R.A. On one differential equation with integral lines // Differential and inTegral Equations. 1977. Iss. 1. P. 19–22.

7. Gorbuzov V.N., Tyshchenko V.Yu. Partial integrals of systems of ordinary differential equations // Mathematical Collection. 1992. Vol. 183, No. 3. P. 76–94.

8. Ushkho D.S., Ushkho A.D. On the coexistence of limit cycles and particular integrals of the linear cubic differential systems on the plane // Proceedings of Physical Society of Adyghea Republic. 2004. No. 9. P. 20–24. URL: http://fora.adygnet.ru

9. Bautin N.N., Leontovich E.A. Methods and techniques of the qualitative study of dynamical

systems on the plane. Moscow: Nauka, 1976. 496 p.

10. On a method for investigating the number of invariant straight polynomial vector fields of the n order / D.S. Ushkho, A.E. Artisevich, N.A. Loboda, A.A. Panesh // Bulletin of the Adyghe State University. Ser.: Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2018. Iss. 4 (231). P. 15–27. URL: http://vestnik.adygnet.ru

11. Andronov A.A. Theory of bifurcations of dynamical systems on a plane / A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon, A.G. Mayer. Moscow: Nauka, 1967. 488 p.

12. Otrokov N.F. Analytical integrals and limit cycles. Gorky: Volga-Vyatka Book Publishing House, 1972. 216 p.

13. Cherkas L.A. On the absence of limit cycles of one equation having a non-rough focus // Differential Equations. 1970. Vol. 6, No. 5. P. 779–783.

Статья поступила в редакцию 01.08.2022; одобрена после рецензирования 01.09.2022; принята к публикации 02.09.2022.

The article was submitted 01.08.2022; approved after reviewing 01.09.2022; accepted for publication 02.09.2022.

© А.Д. Ушхо, 2022