МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья
УДК 517.95+519.21
ББК 22.161.62+22.171.5
Ш 96
DOI: 10.53598/2410-3225-2022-4-311-11-30

Об устойчивости в целом по вероятности решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, возмущенных белым шумом. V*

(*Рецензирована*)

Магомет Мишаустович Шумафов[1], Тимур Аскербиевич Панеш[2], Мухаммед Ареф Хаваджа[3]

[1–3] *Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия*
[1] *magomet_shumaf@mail.ru*
[2] *tpanesh@yandex.ru*
[3] *nblm600@gmail.com*

Аннотация. *Настоящая статья является продолжением предыдущей статьи и представляет собой пятую, завершающую часть работы авторов. В первых четырех частях работы были приведены предварительные сведения из теории вероятностей, теории случайных процессов, теории стохастических дифференциальных уравнений и теории устойчивости стохастических дифференциальных уравнений. В работе рассматриваются нелинейные автономные дифференциальные уравнения второго порядка при случайных возмущениях их параметров. В качестве возмущений рассматриваются гауссовский процесс «белого шума» и случайный процесс из более широкого класса без специальных предположений о виде процесса. В статье получены новые достаточные условия асимптотической устойчивости по вероятности решений нелинейных стохастических уравнений второго порядка. Даны вероятностные оценки пребывания случайной траектории в ограниченной области фазовой плоскости. В качестве примера рассматривается гармонический осциллятор, возмущенный белым шумом.*

Ключевые слова: *случайный процесс, винеровский процесс, белый шум, стохастическое дифференциальное уравнение, стохастическая устойчивость, асимптотическая устойчивость по вероятности, функция Ляпунова*

Original Research Paper

On the stochastic stability in the large of solutions of the nonlinear second-order differential equations perturbed by white noise. V

Magomet M. Shumafov[1], Timur A. Panesh[2], Muhammed A. Havadja[3]

[1–3] *Adyghe State University, Maikop, Russia*
[1] *magomet_shumaf@mail.ru*
[2] *tpanesh@yandex.ru*
[3] *nblm600@gmail.com*

Abstract. *This paper is a continuation of the previous paper and presents the fifth part of the authors' work. In the first four parts of the work, we presented some preliminaries from probability theory, stochastic processes, theory of stochastic differential equations and stability theory of stochas-*

* *Окончание.* №№ 4 (291) 2021 [1], 1 (296) 2022 [2], 2 (301) 2022 [3], 3 (306) 2022 [4].

tic differential equations. In the work, nonlinear autonomous second-order differential equations under random perturbations are considered. Here, in the paper we give new sufficient conditions for stochastic asymptotic stability of solutions of the nonlinear second-order stochastic differential equations. The probabilistic estimations of the remaining of a random trajectory in a bounded region of the phase plane are given. As an example, harmonic oscillator perturbed by white noise random process is considered.

Keywords: *stochastic process, Wiener process, white noise, stochastic differential equation, stochastic stability, stochastic asymptotic stability in the large, Lyapunov function*

Настоящая статья является продолжением предыдущих статей [1–4] и представляет собой пятую, завершающую часть работы авторов. В [1] для удобства читателя были приведены предварительные сведения из стохастического анализа, а в [2] приведены полные конструкции стохастических интегралов Ито и Стратоновича, на основе которых в статье [3] было дано определение решения соответствующих стохастических дифференциальных уравнений. В настоящей статье получены новые достаточные условия асимптотической устойчивости по вероятности решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений второго порядка. Даны вероятностные оценки пребывания случайной траектории в ограниченной области фазовой плоскости. В качестве примера рассматривается стохастический гармонический осциллятор.

Ниже во всей работе мы сохраняем общую нумерацию пунктов и продолжаем ее.

3. Устойчивость решений дифференциальных уравнений второго порядка при случайных возмущениях их параметров

В этом разделе рассматривается вопрос об устойчивости решений типичных для нелинейной механики дифференциальных уравнений второго порядка при случайных возмущениях их параметров. В качестве возмущений рассматриваются два класса случайных процессов: 1) случайные процессы типа белого шума; 2) случайные процессы из более широкого класса без специальных предположений о виде процесса.

3.1. Устойчивость решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, возмущенных белым шумом

Здесь изучается свойство стохастической устойчивости решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, возмущенных случайным процессом белого шума. А именно, рассматриваются уравнения вида:

$$\ddot{x} + \Phi(x, \dot{x}) = \eta(x, \dot{x})\,\dot{w}(t),$$

где

a) $\Phi(x, \dot{x}) = \delta\dot{x} + \beta x + \alpha x^3$;

b) $\Phi(x, \dot{x}) = \mu(x^2 - 1)\dot{x} + \omega^2 x$;

c) $\Phi(x, \dot{x}) = f(x)\dot{x} + g(x)$;

d) $\Phi(x, \dot{x}) = F(\dot{x}) + g(x)$;

e) $\Phi(x, \dot{x}) = \varphi(x, \dot{x}) + g(x)$.

Здесь $\dot{w}(t)$ – гауссовский белый шум, f, g, F, φ, η – некоторые функции от своих аргументов, а α, β, δ, μ, ω – вещественные константы. Предполагается, что функции f, g, F, φ и η удовлетворяют условию Липшица.

3.1.1. Уравнение $\ddot{x} + \delta\dot{x} + \beta x + \alpha x^3 = \sigma\dot{x}\dot{w}(t)$

Рассмотрим классическое уравнение Дуффинга, возмущенное белым шумом

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \beta x + \alpha x^3 = \sigma\dot{x}\dot{w}(t), \tag{1}$$

где $x = x(t)$ – одномерный случайный процесс; $\dot{w}(t)$ – случайный процесс белого шума; α, β, $\delta > 0$, σ – некоторые вещественные числа.

Уравнение (1) будем интерпретировать как систему стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$dx(t) = y(t)\,dt, \qquad dy(t) = \left(-\beta x - \alpha x^3 - \delta y\right)dt + \sigma y\,dw(t), \tag{2}$$

где $w(t)$ – винеровский процесс.

Система (2) имеет единственное нулевое решение $\left(x(t) \equiv 0,\ y(t) \equiv 0\right)$, если $\alpha > 0$, $\beta > 0$, и три стационарных решения $(0,0)$, $\left(-\sqrt{-\beta/\alpha}\ ,0\right)$, $\left(\sqrt{-\beta/\alpha}\ ,0\right)$, если $\alpha > 0$, $\beta < 0$. Справедлива

Теорема 3.1. *Предположим, что* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\delta > 0$ *и выполнено условие* $\sigma^2 < 2\delta$. *Тогда нулевое решение* $\left(x(t) \equiv 0,\ y(t) \equiv 0\right)$ *системы* (2) *аисмптотически устойчиво по вероятности*.

Доказательство. Рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$\mathrm{V}(x, y) = 2y^2 + 2\beta x^2 + \alpha x^4 \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0). \tag{3}$$

Очевидно, V – положительно-определенная функция на плоскости (x, y). Вычислим $L\mathrm{V}(x, y)$, где L – производящий дифференциальный оператор системы (2):

$$L = y\frac{\partial}{\partial x} + \left(-\beta x - \alpha x^3 - \delta y\right)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{y^2}{2}\sigma^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Для функции V из (3) имеем

$$L\mathrm{V} = y\left(4\beta x + 4\alpha x^3\right) + 4y\left(-\beta x - \alpha x^3 - \delta y\right) + 2\sigma^2 y^2 = -2y^2\left(2\delta - \sigma^2\right).$$

Отсюда, в силу условий теоремы 3.1, имеем неравенство $L\mathrm{V} \le 0$ для всех (x, y), причем $L\mathrm{V} = 0$ только при $y = 0$. По теореме Хасьминского [5, с. 207] нулевое решение системы (2) устойчиво по вероятности.

Для произвольного $m > 0$ обозначим $Q_m = \left\{(x, y):\ \mathrm{V}(x, y) < m\right\}$. Так как $\mathrm{V}(x, y) \to +\infty$ при $|x| + |y| \to \infty$, то множество Q_m ограничено.

Очевидно, $\bigcup\limits_1^\infty Q_m = \mathbb{R}^2$. По теореме Кушнера [6, с. 57, 62]

$$\mathrm{P}\left\{\left(x(t), y(t)\right) \to S \text{ при } t \to +\infty\right\} \ge 1 - \mathrm{V}(x_0, y_0)/m,$$

где $S = \left\{(x, y):\ y = 0\right\}$, $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

Отсюда получаем следующий результат:

$$\mathrm{P}\left\{\left(x(t), y(t)\right) \to S \text{ при } t \to +\infty\right\} = 1,$$

где $S = \left\{(x, y):\ y = 0\right\}$.

Легко видеть, что множество $\left\{(x, y):\ L\mathrm{V} = 0\right\}$ не содержит целых полутраекторий $\left(x(t),\ y(t)\right)$ системы (2), за исключением начала координат $(x = 0,\ y = 0)$. Следовательно, в силу теоремы 3.1 из [7] нулевое решение системы (3) асимптотически устойчиво по вероятности. Теорема доказана.

3.1.2. Уравнение $\ddot{x}+\mu\left(x^2-1\right)\dot{x}+\omega^2 x=\sigma x\dot{w}(t)$

Рассмотрим классическое уравнение Ван дер Поля, возмущенное белым шумом

$$\ddot{x}+\mu\left(x^2-1\right)\dot{x}+\omega^2 x=\sigma x\dot{w}(t), \tag{4}$$

где $\dot{w}(t)$ – белый шум интенсивности $\sigma^2 x^2$; σ, μ, ω– некоторые вещественные постоянные.

Будем понимать уравнение (4) как систему двух стохастических дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} dx(t)=\left[y-\mu\left(x^3/3-x\right)\right]dt, \\ dy(t)=-\omega^2 x dt+\sigma x dw(t), \end{cases} \tag{5}$$

где $w(t)$ – винеровский процесс. Система (5) имеет нулевое решение $\left(x(t)\equiv 0,\ y(t)\equiv 0\right)$.

Рассмотрим функцию

$$\mathrm{V}(x,y)=\omega^2 x^2/2+y^2/2. \tag{6}$$

Обозначим

$$Q_m:=\left\{(x,y):\ \mathrm{V}(x,y)<m\right\},\qquad m>0.$$

Имеет место

Теорема 3.2. *Пусть* $\mu<0$. *Предположим, что* $\sigma^2<-2\mu\omega^2$. *Тогда для любого решения* $\left(x(t),\ y(t)\right)$ *системы* (5) *с начальным условием* $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$, $\left(x_0,\ y_0\right)\in Q_{\mathrm{M}}$, $\mathrm{M}=\dfrac{3(\sigma^2+2\mu\omega^2)}{4\mu}$, *справедлива оценка*

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t\ge 0}\mathrm{V}\left(x(t),\ y(t)\right)\ge \mathrm{M}\right\}\le \mathrm{V}\left(x_0,\ y_0\right)/\mathrm{M},$$

и $x(t)\to Q_{\mathrm{M}}\cap\{x=0\}$ *при* $t\to+\infty$ *с вероятностью не меньшей* $1-\mathrm{V}\left(x_0,\ y_0\right)/\mathrm{M}$.

Доказательство. Производящий дифференциальный оператор системы (5) имеет вид:

$$L=\left[y-\mu\left(x^3/3-x\right)\right]\frac{\partial}{\partial x}-\omega^2 x\frac{\partial}{\partial y}+\frac{1}{2}\sigma^2 x^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Вычислим $L\mathrm{V}$ для функции (6). Имеем

$$L\mathrm{V}=\omega^2 x\left[y-\mu\left(x^3/3-x\right)\right]-\omega^2 xy+\sigma^2/2=-\mu\omega^2 x^2\left(x^2/3-1\right)+\sigma^2 x^2/2=$$

$$=-x^2\left[\mu\omega^2 x^2/3-\sigma^2/2-\mu\omega^2\right]. \tag{7}$$

В силу условия теоремы 3.2 выражение в квадратной скобке в (7) положительно при $|x|<\sqrt{p}$, где $p=3\left(1+\dfrac{\sigma^2}{2\mu\omega^2}\right)>0.$ При этом $L\mathrm{V}=0$ в полосе $\left\{(x,y):\ -\sqrt{p}<x<\sqrt{p}\right\}$ только при $x=0$.

В семействе эллипсов

$$\omega^2 x^2+y^2=2m$$

возьмем максимальный эллипс, содержащийся в полосе $\left\{(x,y):\ -\sqrt{p}<x<\sqrt{p}\right\}$. Им будет эллипс с параметром $m = \mathrm{M} = 3\left(\sigma^2 + 2\mu\omega^2\right)/4\mu$. Теперь утверждение теоремы 3.2 следует из теоремы Кушнера [6, с. 57, 62] . Теорема 3.2 доказана.

Замечание. Если воспользоваться теоремой 3.1 из [7], то можно несколько усилить утверждение теоремы 3.2: нулевое решение $\left(x(t) \equiv 0,\ y(t) \equiv 0\right)$ системы (5) асимптотически устойчиво по вероятности и любое решение $\left(x(t),\ y(t)\right)$ с начальным условием $\left(x_0,\ y_0\right) \in Q_{\mathrm{M}}$ стремится к $Q_{\mathrm{M}} \bigcap \left\{x = 0\right\}$ при $t \to +\infty$ с вероятностью не меньшей, чем $1 - \mathrm{V}\left(x_0,\ y_0\right)/\mathrm{M}$.

3.1.3. Уравнение $\ddot{x} + \mu\left(x^2 - 1\right)\dot{x} + \omega^2 x = \sigma\dot{x}\dot{w}(t)$

Рассмотрим теперь случай, когда в стохастическом уравнении Ван дер Поля (4) интенсивность белого шума $\dot{w}(t)$ зависит от $\dot{x}$. Будем понимать это уравнение как систему стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$\begin{cases} dx(t) = ydt, \\ dy(t) = \left[-\omega^2 x - \mu y\left(x^2 - 1\right)\right]dt + \sigma y dw(t), \end{cases} \tag{8}$$

где σ, μ и ω – некоторые вещественные числа, как и в (4).

Для системы (8) справедлива следующая

Теорема 3.3. *Пусть* $\mu < 0$. *Предположим, что* $\sigma^2 < -2\mu$. *Тогда нулевое решение* $\left(x(t) \equiv 0,\ y(t) \equiv 0\right)$ *системы* (8) *асимптотически устойчиво по вероятности. Более того, для любого решения* $\left(x(t),\ y(t)\right)$ *системы* (8) *справедлива оценка*

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t\ge 0} \mathrm{V}\left(x(t),\ y(t)\right) \ge \mathrm{M}\right\} \le \mathrm{V}\left(x_0,\ y_0\right)/\mathrm{M}, \qquad \mathrm{M} = 1 + c^2/2\mu,$$

где $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $\left(x_0,\ y_0\right) \in Q_{\mathrm{M}}$, $Q_{\mathrm{M}} = \left\{\mathrm{V}(x, y) < \mathrm{M}\right\}$, $\mathrm{V}(x, y) = \omega^2 x^2/2 + y^2/2$ *и* $y(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$ *с вероятностью не меньшей, чем* $1 - \mathrm{V}\left(x_0,\ y_0\right)/\mathrm{M}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию (6) и вычислим $L\mathrm{V}$ для системы (8), где L – производящий дифференциальный оператор системы (8):

$$L = y\frac{\partial}{\partial x} + \left[-\omega^2 x - \mu y(x^2 - 1)\right]\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}\sigma^2 y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Имеем

$$L\mathrm{V} = -\mu y^2\left(x^2 - 1\right) + \sigma^2 y^2/2 = -y^2\left[\mu\left(x^2 - 1\right) - \sigma^2/2\right].$$

В силу условия теоремы 3.3 выражение в квадратной скобке будет положительно в полосе $|x| < \sqrt{p}$, где $p = 1 + \sigma^2/2\mu$ ($\mu < 0$).

Очевидно, в множестве $\left\{L\mathrm{V} = 0\right\} = \left\{y = 0\right\}$ нет целых полутраекторий системы (8). Следовательно, используя теорему 3.1 из [7], получаем, что нулевое решение $\left(x(t) \equiv 0,\ y(t) \equiv 0\right)$ системы (8) асимптотически устойчиво по вероятности.

Для доказательства второй части теоремы рассмотрим максимальный эллипс

$$\mathrm{E} = \left\{\omega^2 x^2 + y^2 = 2\mathrm{M}\right\}, \qquad \mathrm{M} = 1 + \sigma^2/2\mu,$$

содержащийся в полосе $\left\{(x, y):\ -\sqrt{p} < x < \sqrt{p}\right\}$.

Воспользовавшись теоремой Кушнера [6, с. 57, 62], получаем оценку вероятности пребывания случайной траектории $\left(x(t),\, y(t)\right)$ внутри эллипса E:

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t\geq 0} \mathrm{V}\left(x(t),\, y(t)\right) \leq \mathrm{M}\right\} \geq 1-\left(\mathrm{V}\left(x_0,\, y_0\right)/\mathrm{M}\right),$$

где $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$, $\left(x_0,\, y_0\right)\in Q_{\mathrm{M}}$, $Q_{\mathrm{M}}=\left\{(x,y):\ \mathrm{V}(x,y)<\mathrm{M}\right\}$. При этом $y(t)\to 0$ при $t\to+\infty$ с вероятностью не меньшей, чем $1-\mathrm{V}\left(x_0,\, y_0\right)/\mathrm{M}$. Теорема 3.3 доказана.

3.1.4. Уравнение $\ddot{x}+f(x)\dot{x}+x=\sigma\dot{x}\dot{w}(t)$

Рассмотрим классическое уравнение Льенара, возмущенное белым шумом

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+x=\sigma\dot{x}\dot{w}(t), \tag{9}$$

где функция f удовлетворяют условию Липшица, $\dot{w}(t)$ – белый шум интенсивности $\sigma^2\dot{x}^2$, а σ – некоторая вещественная константа.

Обозначая $\dot{x}=y$, перепишем уравнение (9) как систему стохастических уравнений Ито:

$$\begin{cases} dx(t)=ydt, \\ dy(t)=\left[-yf(x)-x\right]dt+\sigma ydw(t), \end{cases} \tag{10}$$

где $w(t)$ – винеровский процесс.

Производящий дифференциальный оператор системы (10) имеет вид:

$$L=y\frac{\partial}{\partial x}+\left[-yf(x)-x\right]\frac{\partial}{\partial y}+\frac{1}{2}\sigma^2y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{11}$$

Рассмотрим функцию Ляпунова вида:

$$\mathrm{V}(x,y)=x^2+y^2. \tag{12}$$

Справедлива следующая

Теорема 3.4. *Предположим, что*:

a) *существует константа* $b>0$ *такая, что* $f(x)\geq b$ *для всех* x;

b) $\sigma^2<2b$.

Тогда:

1) *нулевое решение* $\left(x(t)\equiv 0,\, y(t)\equiv 0\right)$ *системы* (10) *асимптотически устойчиво по вероятности*;

2) *для любого решения* $\left(x(t),\, y(t)\right)$ *системы* (10) *и для любого* $m>0$

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0\leq t<\infty} \mathrm{V}\left(x(t),\, y(t)\right)\geq m\right\}\leq \mathrm{V}\left(x_0,\, y_0\right)/m,$$

где $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$, $\left(x_0,\, y_0\right)\in Q_{\mathrm{M}}:=\left\{\mathrm{V}(x,y)<m\right\}$, *а* V *– функция* (12), *при этом* $y(t)\to 0$ *при* $t\to+\infty$ *с вероятностью не меньшей, чем* $1-\mathrm{V}\left(x_0,\, y_0\right)/m$;

3) *для любого решения* $\left(x(t),\, y(t)\right)$ *системы* (10) $y(t)\to 0$ *при* $t\to+\infty$ *с вероятностью* 1.

Доказательство. В силу условия а) теоремы 3.4 функция $\mathrm{V}(x,y)$ из (12) положительно определена и $\mathrm{V}(x,y)\to+\infty$ при $|x|+|y|\to\infty$. Вычислим $L\mathrm{V}$, где L – оператор (11). Имеем:

$$L\mathrm{V}=-2y^2f(x)+\sigma^2y^2.$$

В силу условий a) и b) $L\mathrm{V}$ допускает следующую оценку:

$$L\mathrm{V} \le -2by^2 + \sigma^2 y^2 = -\left(2b - \sigma^2\right) y^2 \le 0 .$$

Очевидно, $L\mathrm{V} = 0$ при $y = 0$. Поскольку $\mathrm{V}(x, y) > 0$ для всех $(x, y) \ne 0$ и $L\mathrm{V} \le 0$ для всех (x, y), то по теореме Хасьминского [5, с. 207] нулевое решение $\left(x(t) \equiv 0,\ y(t) \equiv 0\right)$ устойчиво по вероятности. Ясно, что ось $y = 0$ не содержит целых полутраекторий системы (10). Следовательно, по теореме 3.1 из [7] начало координат асимптотически устойчиво по вероятности.

Пусть m – произвольное положительное число. Обозначим

$$Q_m = \left\{(x, y) :\ \mathrm{V}(x, y) < m\right\}.$$

Множество Q_m ограничено. В силу леммы Кушнера [6, с. 54] траектория процесса $\left(x(t),\ y(t)\right)$, начинающаяся в точке $\left(x_0,\ y_0\right) \in Q_m$, остается строго внутри Q_m с вероятностью не меньшей, чем $1 - \mathrm{V}\left(x_0,\ y_0\right)/m$, то есть

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0 \le t < \infty} \mathrm{V}\left(x(t),\ y(t)\right) \ge m\right\} \le \mathrm{V}\left(x_0,\ y_0\right)/m .$$

При этом на основании теоремы Кушнера [6, с. 57, 62]

$$y(t) \to Q_m \bigcap \left\{y = 0\right\} \quad \text{при} \quad t \to +\infty \tag{13}$$

с вероятностью не меньшей $1 - \mathrm{V}\left(x_0,\ y_0\right)/m$.

Ясно, что объединение всех областей Q_m есть вся плоскость: $\bigcup\limits_{1}^{\infty} Q_m = \mathbb{R}^2$. Тогда, с учетом (13), для любой траектории процесса $\left(x(t),\ y(t)\right)$ с любыми начальными данными $\left(x_0,\ y_0\right)$ выполнено предельное соотношение $y(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ с вероятностью 1. Теорема 3.4 доказана.

3.1.5. Уравнение $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = \sigma x \dot{w}(t)$

Рассмотрим теперь уравнение Льенара в случае, когда оно подвержено возмущению белым шумом, интенсивность которого зависит от x:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = \sigma x \dot{w}(t). \tag{14}$$

Сделав в уравнении (14) замену переменной (замену Льенара) $y = \dot{x} + F(x)$, где $F(x) = \int\limits_0^x f(s)\,ds$, перепишем уравнение (14) в виде эквивалентной системы двух дифференциальных уравнений Ито:

$$\begin{cases} dx(t) = \left(y - F(x)\right)dt, \\ dy(t) = -x\,dt + \sigma x\,dw(t), \end{cases} \tag{15}$$

где $w(t)$ – винеровский процесс.

Производящий дифференциальный оператор системы (15) имеет вид

$$L = \left(y - F(x)\right)\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} . \tag{16}$$

Рассмотрим в качестве функции Ляпунова ту же функцию (12), что и для системы (10).

Имеет место

Теорема 3.5. *Предположим, что функция* f *удовлетворяет условию Липшица и существует константа* $b > 0$ *такая, что*:

a) $F(x)/x \geq b$ *для любого* $x \neq 0$;

b) $\sigma^2 < 2b$.

Тогда:

1) *нулевое решение* $\left(x(t) \equiv 0,\ y(t) \equiv 0\right)$ *системы* (15) *асимптотически устойчиво по вероятности*;

2) *для любого решения* $\left(x(t),\ y(t)\right)$ *системы* (15) *и для любого* $m > 0$

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0 \leq t < \infty} \mathrm{V}\left(x(t),\ y(t)\right) \geq m\right\} \leq \mathrm{V}\left(x_0,\ y_0\right)/m,$$

где $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $\left(x_0,\ y_0\right) \in Q_{\mathrm{M}} = \left\{\mathrm{V}(x, y) < m\right\}$, V *– функция* (12); *при этом* $x(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$ *с вероятностью не меньшей* $1 - \mathrm{V}\left(x_0,\ y_0\right)/m$;

3) *для любого решения* $\left(x(t),\ y(t)\right)$ *системы* (15) $x(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$ *с вероятностью* 1.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.4. Для функции (12) имеем:

$$L\mathrm{V} = -xF(x) + \sigma^2 x^2/2,$$

где L – оператор (16).

Отсюда, в силу условий a) и b) теоремы 3.5, получаем оценку

$$L\mathrm{V} = -x^2\left(\frac{F(x)}{x} - \frac{\sigma^2}{2}\right) \leq -\left(b - \sigma^2/2\right)x^2 \leq 0 .$$

Из последней оценки и положительной определенности функции (12) следует, в силу теоремы Хасьминского [5, с. 207], устойчивость по вероятности нулевого решения $\left(x(t) \equiv 0,\ y(t) \equiv 0\right)$.

Дальше, повторяя рассуждения, аналогичные доказательству предыдущей теоремы 3.4, приходим к заключениям 2) и 3) теоремы 3.5. Теорема 3.5 доказана.

3.1.6. Уравнение $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = (\sigma_1 x + \sigma_2 \dot{x})\dot{w}(t)$

Рассмотрим снова классическое уравнение Льенара, возмущенное белым шумом $\dot{w}(t)$. Пусть теперь интенсивность белого шума зависит от x и $\dot{x}$:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = (\sigma_1 x + \sigma_2 \dot{x})\dot{w}(t), \tag{17}$$

где σ_1 и σ_2 – некоторые константы.

Как и выше, уравнение (17) будем понимать как систему стохастических уравнений Ито:

$$dx(t) = y dt, \quad dy(t) = \left[-yf(x) - x\right]dt + (\sigma_1 x + \sigma_2 y)dw(t), \tag{18}$$

где $w(t)$ – винеровский процесс.

Производящий дифференциальный оператор системы (18) имеет вид:

$$L = y\frac{\partial}{\partial x} + \left[-yf(x) - x\right]\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}(\sigma_1 x + \sigma_2 y)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} . \tag{19}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.6. *Предположим, что функция* f *удовлетворяет условию Липшица* *и существует число* $b>0$ *такое, что*

a) $f(x)\geq b$ *для всех* $x\in\mathbb{R}$;

b) $\sigma_0^2<b/2$, *где* $\sigma_0^2=\max\{\sigma_1^2,\sigma_2^2\}$.

Тогда нулевое решение $\left(x(t)\equiv 0,\ y(t)\equiv 0\right)$ *системы* (18) *асимптотически устойчиво по вероятности в целом.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\mathrm{V}(x,y)=2\int_0^x sf(s)\,ds+2xy+\alpha\left(x^2+y^2\right), \tag{20}$$

где $\alpha>0$ – некоторый параметр, значение которого будет выбрано ниже.

Функция (20), в силу условия a) теоремы 3.6, допускает следующую оценку снизу:

$$\mathrm{V}(x,y)\geq bx^2+2xy+\alpha y^2.$$

Квадратичная форма в правой части последнего неравенства положительно определена, если выбрать параметр α, удовлетворяющим неравенству $\alpha>1/b$. Тогда функция (20) положительно определена:

$$\mathrm{V}(x,y)>0\quad\forall(x,y)\neq(0,0)\quad\text{и}\quad\mathrm{V}(x,y)\to+\infty\quad\text{при}\quad|x|+|y|\to\infty.$$

Оценим $L\mathrm{V}$, где L – оператор (19). Используя элементарное неравенство

$$\left(\sigma_1x+\sigma_2y\right)^2\leq 2\left(\sigma_1^2x^2+\sigma_2^2y^2\right),$$

с учетом условия a) теоремы 3.6 имеем:

$$L\mathrm{V}=2\left(y^2-\alpha y^2f(x)-x^2\right)+\alpha\left(\sigma_1x+\sigma_2y\right)^2\leq 2\left(y^2-\alpha by^2-x^2\right)+2\alpha\sigma_0^2\left(x^2+y^2\right)=$$

$$=2\left[\left(\alpha\sigma_0^2-1\right)x^2+\left(\alpha\sigma_0^2-\alpha b+1\right)y^2\right]=:Q(x,y). \tag{21}$$

Выберем параметр α, удовлетворяющим дополнительно условиям

$$\alpha\sigma_0^2-1<0,\quad \alpha\sigma_0^2-\alpha b+1<0,$$

то есть

$$\frac{1}{b-\sigma_0^2}<\alpha<\frac{1}{\sigma_0^2}.$$

Такой выбор значения параметра α возможен в силу условия b) теоремы 3.6.

Тогда из (21) следует, что

$$L\mathrm{V}\leq Q(x,y)<0\qquad\forall(x,y)\neq(0,0),$$

то есть функция $L\mathrm{V}$ отрицательно определена.

Таким образом, выполнены все условия теоремы Хасьминского [5, с. 215]. Следовательно, нулевое решение $\left(x(t)\equiv 0,\ y(t)\equiv 0\right)$ асимптотически устойчиво по вероятности в целом. Теорема 3.6 доказана.

Замечание. Для системы (18) справедливы также утверждения, аналогичные утверждениям 2) и 3) теоремы 3.5, где V – функция (20).

3.1.7. Уравнение $\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+x=(\sigma_1x+\sigma_2\dot{x})\dot{w}(t)$

Рассмотрим классическое уравнение Левинсона-Смита, возмущенное белым шумом:

$$\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+x=(\sigma_1x+\sigma_2\dot{x})\dot{w}(t), \tag{22}$$

где функция f удовлетворяет условию Липшица, а $\dot{w}(t)$ – белый шум.

Уравнение (22) будем понимать как систему двух стохастических уравнений

Ито первого порядка

$$dx(t) = ydt, \quad dy(t) = \left[-yf(x,y) - x\right]dt + (\sigma_1 x + \sigma_2 y)dw(t), \tag{23}$$

где $w(t)$ – винеровский процесс.

Производящий дифференциальный оператор системы (23) имеет вид:

$$L = y\frac{\partial}{\partial x} + \left[-yf(x,y) - x\right]\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}(\sigma_1 x + \sigma_2 y)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{24}$$

Имеет место следующая

Теорема 3.7. *Предположим, что функция* $f(x,y)$ *удовлетворяет условию Липшица и существует число* $b > 0$ *такое, что*

a) $b < f(x,y) < b + 2\sqrt{\left(\alpha^*\sigma_0^2 - 1\right)\left(\alpha^*\sigma_0^2 - \alpha^* b + 1\right)}$ *для всех* $j(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$\alpha^* = \dfrac{b}{2\sigma_0^2\left(b - \sigma_0^2\right)}$, $\quad \sigma_0^2 = \max\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\} \quad \left(\dfrac{1}{b - \sigma_0^2} < \alpha^* < \dfrac{1}{\sigma_0^2}\right)$;

b) $\sigma_0^2 < b/2$.

Тогда нулевое решение $\left(x(t) \equiv 0,\ y(t) \equiv 0\right)$ *системы* (21) *асимптотически устойчиво по вероятности в целом.*

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 3.6. Рассмотрим функцию

$$\mathrm{V}(x,y) = bx^2 + 2xy + \alpha(x^2 + y^2), \tag{25}$$

где $\alpha > 0$ – некоторый параметр, значение которого будет выбрано ниже.

Функция (25) будет положительно определенной, если выбрать $\alpha > 1/b$. Тогда $\mathrm{V}(x,y) \to +\infty$ при $|x| + |y| \to \infty$.

Оценим $L\mathrm{V}$, где L – оператор (24). В силу условий a) и b) теоремы 3.7 аналогично (21) имеем:

$$L\mathrm{V} = 2y^2 + 2\left(b - f(x,y)\right)xy - 2x^2 - \alpha y^2 f(x,y) + \alpha(\sigma_1 x + \sigma_2 y)^2 \le$$

$$\le 2\left[\left(\alpha\sigma_0^2 - 1\right)x^2 + \left(1 - \alpha b_1 + \alpha\sigma_0^2\right)\right]y^2 + xy\left(b - f(x,y)\right) =: Q(x,y). \tag{26}$$

Выберем значение параметра α, удовлетворяющим неравенствам

$$\frac{1}{b - \sigma_0^2} < \alpha < \frac{1}{\sigma_0^2}. \tag{27}$$

Такой выбор значения параметра α возможен в силу условия b) теоремы 3.7. Правая часть $Q(x,y)$ неравенства (26), с учетом неравенств (27), отрицательно определена, если

$$\left(f(x,y) - b\right)^2 < 4\left(\alpha\sigma_0^2 - 1\right)\left(\alpha\sigma_0^2 - \alpha b + 1\right). \tag{28}$$

Правая часть последнего неравенства имеет наибольшее значение при

$$\alpha^* = \frac{b}{2\sigma_0^2\left(b - \sigma_0^2\right)} > 0.$$

Непосредственно проверяется, что $\alpha^* \in \left(\dfrac{1}{b - \sigma_0^2}, \dfrac{1}{\sigma_0^2}\right)$. Неравенство (28), где $\alpha = \alpha^*$, выполняется в силу условия a) теоремы 3.7. Итак, $L\mathrm{V} < Q(x,y) < 0$ для всех

$(x,y)\neq(0,0)$.

Таким образом, выполнены все условия теоремы Хасьминского [5, с. 215]. Следовательно, нулевое решение $(x(t)\equiv 0,\ y(t)\equiv 0)$ системы (23) асимптотически устойчиво по вероятности в целом. Теорема 3.7 доказана.

Замечание 1. Для системы (23) справедливы также утверждения, аналогичные утверждениям 2) и 3) теоремы 3.5, где V – функция (25). А именно: для любого решения $(x(t),\ y(t))$ системы (23) и для любого $m>0$

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0\le t<\infty}\mathrm{V}\big(x(t),\ y(t)\big)\ge m\right\}\le \mathrm{V}(x_0,\ y_0)/m,$$

где $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$, $(x_0,\ y_0)\in Q_m=\{\mathrm{V}(x,y)<m\}$; при этом $(x(t),\ y(t))\to(0,0)$ при $t\to+\infty$ с вероятностью не меньшей, чем $1-\mathrm{V}(x_0,\ y_0)/m$.

Замечание 2. Из доказательства теоремы 3.7 следует, что утверждение теоремы остается справедливым, если условие a) заменить на несколько более слабое условие:

a') $f(x,y)>b_1>0$ для всех $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)<b+2\sqrt{(\alpha^*\sigma_0^2-1)(\alpha^*\sigma_0^2-\alpha^*b+1)}$ при $xy<0$.

Рассмотрим частный случай уравнение (22), когда интенсивность белого шума зависит только от $\dot{x}:\sigma_1=0$. В этом случае можно получить более слабые достаточные условия стохастической устойчивости.

3.1.8. Частный случай: уравнение $\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+x=\sigma\dot{x}\dot{w}(t)$

Рассматриваемая эквивалентная система стохастических уравнений имеет вид:

$$dx(t)=ydt,\qquad dy(t)=\big[-yf(x,y)-x\big]dt+\sigma ydw(t),\tag{29}$$

где $w(t)$ – винеровский процесс.

Производящий дифференциальный оператор системы (29) имеет вид (24), где $\sigma_1=0$, $\sigma_2=\sigma$.

Справедлива

Теорема 3.8. *Предположим, что существует число* $b>0$ *такое, что*:

a) $f(x,y)\ge b$ *для всех* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$;

b) $\sigma^2<b$.

Тогда нулевое решение системы (29) *асимптотически устойчиво*.

Более того, для любого решения $(x(t),\ y(t))$ *системы* (29) *и для любого* $m>0$

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0\le t<\infty}\mathrm{V}\big(x(t),\ y(t)\big)\ge m\right\}\le \mathrm{V}(x_0,\ y_0)/m,$$

где $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$, $(x_0,\ y_0)\in Q_m=\{(x,y):\mathrm{V}(x,y)<m\}$, V *– функция* (25); *при этом* $y(t)\to 0$ *при* $t\to+\infty$ *с вероятностью не меньшей* $1-\mathrm{V}(x_0,\ y_0)/m$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\mathrm{V}(x,y)=x^2+y^2.\tag{30}$$

Оценим $L\mathrm{V}$. Имеем в силу условия a) теоремы 3.8:

$$L\mathrm{V}=2xy+2y\big(-yf(x,y)-x\big)+\sigma^2y^2=-2y^2f(x,y)+\sigma^2y^2\le -y^2\left(2b-\sigma^2\right).$$

Отсюда, с учетом условия b) теоремы 3.8, имеем $L\mathrm{V}\le 0$ для всех (x,y). Следовательно, по теореме Хасьминского [5, с. 207] нулевое решение $\left(x(t)\equiv 0,\ y(t)\equiv 0\right)$ системы (29) устойчиво по вероятности.

Далее, поскольку $L\mathrm{V}=0$ только при $y=0$ и множество $\{y=0\}$ не содержит целых полутраекторий, то по теореме 3.1 из [7] нулевое решение асимптотически устойчиво по вероятности.

Для произвольного числа $m>0$ обозначим

$$Q_m=\left\{(x,y):\ \mathrm{V}(x,y)<m\right\}.$$

По лемме Кушнера [6, с. 54] траектория процесса $\left(x(t),\ y(t)\right)$, начинающаяся в точке $\left(x_0,\ y_0\right)\in Q_m$, остается строго внутри Q_m с вероятностью не меньшей $1-\mathrm{V}\left(x_0,\ y_0\right)/m$, где V – функция (30). При этом на основании теоремы Кушнера [6, с. 57, 62]

$$y(t)\to Q_m\cap\{y=0\}\quad \text{при}\quad t\to+\infty$$

с вероятностью не меньшей $1-\mathrm{V}\left(x_0,\ y_0\right)/m$.

Очевидно $\bigcup\limits_{1}^{\infty}Q_m=\mathbb{R}^2$. Следовательно, в силу произвольности $m>0$ для любой траектории $\left(x(t),\ y(t)\right)$ процесса с любыми начальными данными $\left(x_0,\ y_0\right)$ выполнено предельное соотношение $y(t)\to 0$ при $t\to+\infty$ с вероятностью 1. Теорема 3.8 доказана.

Пример: стохастический гармонический осциллятор

Найдем условия устойчивости случайного процесса на выходе системы, представляющей собой гармонический осциллятор, на вход которой поступает гауссовский «белый шум» $\dot{w}(t)$.

А. Рассмотрим сначала случай, когда интенсивность шума зависит (линейно) только от x. Такая система описывается уравнением

$$\ddot{x}+k\dot{x}+\omega^2x=\sigma x\dot{w}(t), \tag{31}$$

где $k>0$ – коэффициент трения, ω – собственная частота, а σ^2x^2 есть интенсивность белого шума $\dot{w}(t)$ на входе системы.

Уравнение (31) – частный случай (при $\omega=1$) стохастического уравнения Льенара (14): $f(x)=k$.

Применяя теорему 3.5 к эквивалентной уравнению (31) системе стохастических уравнений Ито

$$dx(t)=(y-kx)\,dt,\qquad dy(t)=-\omega^2x+\sigma x\,dw(t), \tag{32}$$

где $w(t)$ – винеровский процесс, получим следующие условия асимптотической устойчивости по вероятности нулевого решения (к которому сводится устойчивость любого решения переходом к уравнениям в отклонениях) системы (32).

Предложение 1. Нулевое решение $\left(x(t)\equiv 0,\ y(t)\equiv 0\right)$ системы (32) асимптотически устойчиво по вероятности, если $\sigma^2<2k\omega^2$. Кроме того, для любого решения $\left(x(t),\ y(t)\right)$ и любого числа $m>0$ справедлива оценка

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0\le t<+\infty}\left(\omega^2 x(t)^2 + y(t)^2\right) > 2m\right\} < \frac{\omega^2 x_0^2 + y_0^2}{2m},$$

где $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$; $\omega^2 x_0^2 + y_0^2 < 2m$.

Замечание. Условие $\sigma_0^2 < 2k\omega^2$ является необходимым и достаточным условием [8] экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом нулевого решения системы (32), то есть

$$\mathrm{M}\left\|\left(x(t),\, y(t)\right)\right\|^2 \le \mathrm{A}\left\|\left(x(0),\, y(0)\right)\right\|^2 \exp(-\alpha t)$$

для некоторых $\mathrm{A} > 0$, $\alpha > 0$.

Уравнение (31) можно интерпретировать как уравнение гармонического осциллятора, собственная частота ω которого подвержена воздействию белого шума $\dot{w}(t)$ с интенсивностью $\sigma^2 x^2$.

B. Рассмотрим теперь случай, когда гармонический осциллятор возмущен белым шумом, интенсивность которого зависит (линейно) только от $\dot{x}$:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \omega^2 x = \sigma\dot{x}\dot{w}(t), \tag{33}$$

где $\dot{w}(t)$ – белый шум.

Перепишем уравнение (33) в виде системы стохастических уравнений Ито

$$dx(t) = ydt, \qquad dy(t) = -\omega^2 x - ky + \sigma y dw(t), \tag{34}$$

где $w(t)$ – винеровский процесс.

Уравнение (33) – частный случай (при $\omega = 1$) стохастического уравнения Льенара (9): $f(x) = k$.

Применяя к системе (34) теорему 3.4, получим следующее

Предложение 2. Нулевое решение $\left(x(t) \equiv 0,\, y(t) \equiv 0\right)$ системы (34) асимптотически устойчиво по вероятности, если $\sigma^2 < 2k$. Кроме того, справедливо также утверждение, приведенное выше в конце предложения 1.

Замечание. Условие $\sigma^2 < 2k$ является необходимым и достаточным условием [8] экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом нулевого решения системы (34).

3.2. Устойчивость случайных процессов, определяемых дифференциальными уравнениями второго порядка со случайными правыми частями

Рассмотрим теперь случай, когда дифференциальные уравнения возмущены случайным процессом из более широкого класса без специальных предположений о виде процесса. При этом от случайного процесса мы будем требовать меньше, чем в случае возмущений белого шума.

Рассматриваются нелинейные дифференциальные уравнения вида

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = \sigma(x,y)\xi(t,\omega), \tag{35}$$

$$\ddot{x} + F(\dot{x}) + x = \sigma(x,y)\xi(t,\omega), \tag{36}$$

$$\ddot{x} + \varphi(x,\dot{x}) + x = \sigma(x,y)\xi(t,\omega), \tag{37}$$

где функции $f(x)$, $F(y)$, $\varphi(x,y)$ и $\sigma(x,y)$ $(x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ t \ge t_0)$ удовлетворяют локальному условию Липшица и условию линейного роста относительно своих аргументов, $\xi(t,\omega)$ – измеримый случайный процесс со значениями в $\mathbb{R}$, абсолютно интегрируемый на каждом конечном интервале с вероятностью 1, а σ – некоторое вещественное число (точка над символом x обозначает дифференцирование по t: $\dot{x} \equiv dx/dt$, $\ddot{x} \equiv d^2x/dt^2$).

Предполагается, что задано вероятностное пространство $(\Omega,\ U,\ \mathrm{P})$, где $\Omega = \{\omega\}$ – пространство элементарных событий; U – семейство подмножеств в Ω (называемых событиями), образующих σ-алгебру; P – вероятностная мера, определенная на U.

При сделанных выше предположениях для любых начальных данных $(t_0,\ x_0(\omega),\ y_0(\omega))$, где $t_0 \geq 0$, $(x_0(\omega),\ y_0(\omega)) \in \mathrm{K}$, K – любой компакт в $\mathbb{R}^2$, существует и единственно [5, с. 26] решение $x(t,\omega)$ каждого из уравнений (35), (36) и (37), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0,\ \omega) = x_0(\omega)$, $\dot{x}(t_0,\ \omega) = y_0(\omega)$ при всех $t \geq t_0$, причем это решение представляет собой абсолютно-непрерывный с вероятностью 1 случайный процесс.

Предположим, что

$$F(0) = \varphi(0,0) = \sigma(0,0) = 0,$$

так что уравнения (35)–(37) имеют нулевое решение $x(t,\omega) \equiv 0$. Как и в детерминированном случае, вводя новые переменные, равные отклонениям соответствующих координат «возмущенного» движения от «невозмущенного», можно свести задачу об устойчивости любого нетривиального решения к задаче об устойчивости нулевого решения $x(t,\omega) \equiv 0$.

В детерминированном случае, когда $\sigma(x,\dot{x}) \equiv 0$, различные свойства решений уравнений (35), (36) и (37) изучались в многочисленных работах разных авторов; обзор результатов этих работ можно найти, например, в [9–11].

Предположим, что случайный процесс $\xi(t,\omega)$ удовлетворяет закону больших чисел: для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ можно указать число $\mathrm{T} > 0$ такое, что при $t > \mathrm{T}$ выполняется неравенство

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\xi(s,\omega)\,ds - \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t_0+t}\mathrm{M}\xi(s,\omega)\,ds\right| > \delta\right\} < \varepsilon. \tag{38}$$

Здесь M обозначает математическое ожидание.

3.2.1. Уравнение $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = \sigma(x,y)\xi(t,\omega)$

Рассмотрим эквивалентную уравнению (35) систему

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -f(x)y - x + \sigma(x,y)\xi(t,\omega). \tag{39}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\mathrm{V}(x,y) = \left[\mathrm{W}(x,y)\right]^{\alpha}, \qquad \mathrm{W}(x,y) = \frac{y^2}{2} + \gamma xy + \frac{x^2}{2}, \tag{40}$$

где $\alpha \in (0,1)$, γ – достаточно мало.

Положим

$$\mathrm{B} = \sup_{(x_i,y_i)\in\mathbb{R}^2} \frac{\left|\mathrm{V}(x_2,y_2) - \mathrm{V}(x_1,y_1)\right|}{|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|}.$$

Имеет место

Теорема 3.9. *Предположим, что существуют* $c_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$ *такие, что выполняются следующие условия*:

1) $0 < c_1 \le f(x) \le c_2$ *для любого* $x \in \mathbb{R}$;

2) $\left|\sigma(x, y)\right| \le c_3 \sqrt{\lambda_0} \left(x^2 + y^2\right)^{1/2}$ *для всех* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *где* $\lambda_0 = (1-\gamma)/2$;

3) $0 < \gamma < \min\left\{1, c_1, \dfrac{4c_1}{c_2^2 + 4}\right\}$;

4) *случайный процесс* $\xi(t, \omega)$ *удовлетворяет закону больших чисел* (38) *и условию*

$$\sup_{t>0} \mathrm{M}\left|\xi(t, \omega)\right| < \frac{c_4}{\mathrm{B}c_3}.$$

Тогда нулевое решение $\left(x(t, \omega) \equiv 0,\ y(t, \omega) \equiv 0\right)$ *системы* (39) *асимптотически устойчиво по вероятности в целом.*

Если процесс $\left|\xi(t, \omega)\right|$ *удовлетворяет усиленному закону больших чисел* (*вместо* (38) $\mathrm{P}\left\{\left|* - *\right| \to 0\right\} = 1$), *то нулевое решение системы* (39) *асимптотически устойчиво в целом с вероятностью* 1.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $\mathrm{W}(x, y)$ из (40). В силу условия 3) теоремы 3.9 форма $\mathrm{W}(x, y)$ положительно определена. Оценим ее производную в силу детерминированной части $(\sigma(x, y) \equiv 0)$ системы (39): $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -f(x)y - x$. С учетом условия 1) теоремы 3.9 имеем:

$$-\dot{\mathrm{W}} = \gamma x^2 + \gamma f(x)xy + (f(x) - \gamma)y^2 \ge \gamma x^2 + \gamma c_k xy + (c_1 - \gamma)y^2, \qquad (41)$$

где $c_k = c_1$ при $xy > 0$ и $c_k = c_2$ при $xy < 0$. Квадратичная форма

$$Q(x, y) = \gamma x^2 + \gamma c_k xy + (c_1 - \gamma)y^2$$

в правой части неравенства (41), в силу условия 3) теоремы 3.9, положительно определена (при $k = 1$ и $k = 2$).

Для квадратичных форм $\mathrm{W}(x, y)$ и $Q(x, y)$ имеют место оценки:

$$\lambda_0\left(x^2 + y^2\right) \le \mathrm{W}(x, y) \le \lambda_1\left(x^2 + y^2\right) \qquad (42)$$

$$\lambda_2(x^2 + y^2) \le Q(x, y) \le \lambda_3(x^2 + y^2), \qquad (43)$$

где

$$\lambda_0 = (1-\gamma)/2 \quad \text{и} \quad \lambda_1 = (1+\gamma)/2$$

$$\lambda_2 = \frac{c_1 - \sqrt{c_1^2 - 4c_1\gamma + (c_1^2 + 4)\gamma^2}}{2} \quad \text{и} \quad \lambda_3 = \frac{c_1 + \sqrt{c_1^2 - 4c_1\gamma + (c_1^2 + 4)\gamma^2}}{2} \ -$$

наименьшее и наибольшее собственные значения матриц квадратичных форм $\mathrm{W}(x, y)$ и $Q(x, y)$ соответственно. В силу условия 3) теоремы 3.9 $\lambda_0 > 0$ и $\lambda_2 > 0$. (Непосредственно проверяется, что $c_1^2 - 4c_1\gamma + (c_1^2 + 4)\gamma^2 > 0$ для всех γ, причем $(c_1^2 + 4)\gamma^2 - 4c_1\gamma > 0$ в силу условия 3) теоремы.)

Из оценок (41), (42) и (43) следует, что при достаточно малых $\mu > 0$ будет выполнено соотношение

$$\dot{\mathrm{W}}(x, y) \le -\mu \mathrm{W}(x, y), \qquad (44)$$

а именно, при $0 < \mu \le \lambda_2/\lambda_1$.

Для функции $V(x, y)$ из (40), с учетом неравенства (44), получаем следующую оценку для ее производной в силу детерминированной части системы (39):

$$\dot{V} = \alpha W^{\alpha-1}\dot{W} \le -\alpha\mu W^{\alpha} = -\alpha\mu V. \qquad (45)$$

Теперь покажем, что функция V удовлетворяет глобальному условию Липшица. Для этого оценим по модулю частные производные $\partial V/\partial x$ и $\partial V/\partial y$ для функции V из (40).

Поскольку

$$\left|\frac{\partial W}{\partial x}\right| = |x + \gamma y| \le |x| + \gamma|y|, \qquad \left|\frac{\partial W}{\partial y}\right| = |\gamma x + y| \le \gamma|x| + |y|,$$

то, полагая $\alpha = 1/2$, в силу нижней оценки (42), имеем

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right| \le \frac{1}{2\sqrt{\lambda_0}} \frac{|x| + \gamma|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \le \frac{1}{2\sqrt{\lambda_0}} \cdot \frac{|x| + |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \le \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}},$$

$$\left|\frac{\partial V}{\partial y}\right| \le \frac{1}{2\sqrt{\lambda_0}} \frac{\gamma|x| + |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \le \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} \qquad (0 < \gamma < 1).$$

Отсюда следует, что частные производные $\partial V/\partial x$ и $\partial V/\partial y$ ограничены для всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Следовательно, функция $V(x, y)$ удовлетворяет глобальному условию Липшица с константой Липшица $B = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_0}}$.

В силу условия 2) теоремы 3.9 и нижней оценки (42) для квадратичной формы $W(x, y)$ имеем:

$$|\sigma(x, y)| \le c_3\sqrt{\lambda_0}\sqrt{x^2 + y^2} \le c_3\left[W(x, y)\right]^{1/2} = c_3 V(x, y).$$

В (45) полагаем $\alpha = 1/2$. Тогда в условии 4) теоремы 3.9 в качестве константы c_4 берем $\mu/2$.

Таким образом, все условия теоремы Хасьминского [5, с. 45] выполнены. Отсюда следуют утверждения теоремы 3.9. Теорема 3.9 доказана.

Замечание. Поскольку вспомогательная функция $V(x, y)$ в доказательстве теоремы 3.9 не зависит от $f(x)$, то все рассуждения в доказательстве теоремы 3.9 остаются в силе и для уравнения

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = \sigma(x, \dot{x})\xi(t, \omega),$$

где функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию

$$0 < c_1 < f(x, y) < c_2 \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

а остальные условия теоремы 3.9 остаются неизменными.

3.2.2. Уравнение $\ddot{x} + F(\dot{x}) + x = \sigma(x, y)\xi(t, \omega)$

Перепишем уравнение (36) в виде эквивалентной системы

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -F(y) - x + \sigma(x, y)\xi(t, \omega). \qquad (46)$$

Рассмотрим вспомогательную функцию (40), где $\alpha = 1/2$.

Справедлива следующая

Теорема 3.10. *Пусть для некоторых постоянных* $c_i > 0$ $(i = \overline{1,6})$ *выполнены условия*:

1) $0 < c_1 \le F(y)/y \le c_2$ *для всех* $y \ne 0$, $F(0) = 0$;

2) $\left|\sigma(x, y)\right| \le c_3 \sqrt{\lambda_0}\sqrt{x^2 + y^2}$, *где* $\lambda_0 = (1-\gamma)/2$;

3) $0 < \gamma < \min\left\{1, c_1, 4c_1 \Big/ \left(c_2^2 + 4c\right)\right\}$;

4) *случайный процесс* $\xi(t,\omega)$ *удовлетворяет условию* 4) *теоремы* 3.9, *где константа* В *определена аналогичным образом для функции* V *из* (40).

Тогда нулевое решение $\left(x(t,\omega) \equiv 0,\ y(t,\omega) \equiv 0\right)$ *системы* (46) *асимптотически устойчиво по вероятности в целом.*

Если $\left|\xi(t,\omega)\right|$ *удовлетворяет усиленному закону больших чисел, то нулевое решение асимптотически устойчиво в целом с вероятностью* 1.

Доказательство проводится по той же самой схеме, что и доказательство теоремы 3.9. Функция $W(x, y)$ из (40) в силу условия 3) теоремы 3.10 положительно определена и допускает оценку (42).

Производная $\dot{\mathrm{W}}$ в силу детерминированной части $(\sigma(x, y) \equiv 0)$ системы (46) имеет вид:

$$\dot{\mathrm{W}}(x, y) = \gamma y^2 - yF(y) - \gamma x g(x) - \gamma x F(y).$$

С учетом условия 1) теоремы 3.10 функция $-\dot{\mathrm{W}}(x, y)$ допускает оценку снизу

$$-\dot{\mathrm{W}}(x, y) \ge (c_1 - \gamma) y^2 + \gamma x^2 + \gamma c_k x y, \tag{47}$$

где $c_k = c_1$ при $xy > 0$ и $c_k = c_2$ при $xy < 0$.

Квадратичная форма

$$Q(x, y) = \gamma x^2 + \gamma c_k x y + (c_1 - \gamma) y^2$$

в правой части неравенства (41), в силу условия 3) теоремы 3.10, положительно определена (при $k = 1$ и $k = 2$).

Как и в доказательстве теоремы 3.9 при достаточно малых $\mu > 0$ будет выполнено соотношение

$$\dot{\mathrm{W}}(x, y) \le -\mu \mathrm{W}(x, y), \tag{48}$$

а именно, при $0 < \mu \le \lambda_2/\lambda_1$ (см. (42), (43)).

Функция $\mathrm{V}(x, y) = \sqrt{\mathrm{W}(x, y)}$ удовлетворяет глобальному условию Липшица. Это следует, как и в доказательстве теоремы 3.9, из ограниченности частных производных функции V :

$$\left|\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right| \le \frac{|x| + \gamma|y|}{\sqrt{\lambda_0}\sqrt{x^2 + y^2}} \le \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}, \qquad \left|\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\right| \le \frac{\gamma|x| + |y|}{\sqrt{\lambda_0}\sqrt{x^2 + y^2}} \le \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} \qquad (0 < \gamma < 1).$$

Далее, для функции $\sigma(x, y)$, в силу условия 3) теоремы 3.10 и оценки $\mathrm{W}(x, y) \ge \lambda_0\left(x^2 + y^2\right)$ (см. (42)), имеем неравенство $\left|\sigma(x, y)\right| \le c_5 \mathrm{V}(x, y)$.

Теперь утверждение теоремы 3.10 следует из теоремы Хасьминского [5, с. 45]. Теорема 3.10 доказана.

Замечание. Поскольку вспомогательная функция $\mathrm{V}(x, y)$ в доказательстве теоремы 3.9, не зависит от $f(x)$, то все рассуждения в доказательстве теоремы 3.9 остаются в силе и для уравнения

$$\ddot{x}+\varphi(x,\dot{x})+x=\sigma(x,y)\xi(t,\omega),$$

где функция $\varphi(x,y)$ удовлетворяет условию

$$0<c_1<\varphi(x,y)/y<c_2 \qquad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, \tag{49}$$

а остальные условия теоремы 3.10 остаются неизменными.

Пример. Рассмотрим гармонический осциллятор, на вход которого поступает случайный процесс $\xi(t,\omega)$ с ограниченным математическим ожиданием.

Такая система описывается уравнением

$$\ddot{x}+k\dot{x}+\omega^2 x=\sigma(x,\dot{x})\xi(t,\omega), \tag{50}$$

где $k>0$ – коэффициент трения (в случае маятника); ω – собственная частота колебаний; $\sigma(x,y)^2$ – интенсивность случайного возмущения $\xi(t,\omega)$ на входе системы.

Уравнение (50) – частный случай (при $\omega=1$) уравнения (35): $f(x)=k$ (или уравнения (36): $F(y)=ky$).

Из теоремы 3.9 следует

Утверждение. Пусть $0<\gamma<\min\left\{1,k,\dfrac{4k}{k^2+4}\right\}$. Предположим, что выполнены условия 2) и 4) теоремы 3.9 с $c_1=c_2=k$, $c_4=\lambda_2/2\lambda_1$, где λ_1 и λ_2 – числа из (42) и (43). Тогда тривиальное решение $\left(x(t,\omega)\equiv 0,\ y(t,\omega)\equiv 0\right)$ системы

$$\dot{x}=y, \qquad \dot{y}=-x-ky+\sigma(x,y)\xi(t,\omega)$$

асимптотически устойчиво по вероятности в целом. Если $|\xi(t,\omega)|$ удовлетворяет усиленному закону больших чисел, то тривиальное решение асимптотически устойчиво в целом с вероятностью 1.

Сформулируем еще одну теорему, дающую достаточные условия устойчивости нулевого решения систем (35)–(37) при постоянно действующих малых случайных возмущениях вида $\sigma(x,y)\xi(t,\omega)$.

Пусть случайный процесс $\xi(t,\omega)$ удовлетворяет следующему условию: для любого $\varepsilon>0$ найдется число $\gamma>0$ такое, что при $t_0\le s<t$ выполняется неравенство:

$$\mathrm{M}\exp\left\{\gamma\int_s^t\left|\xi(\tau,\omega)\right|d\tau\right\}\le e^{\varepsilon(t-s)}. \tag{51}$$

Рассмотрим использованную ранее функцию (40). Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.11. *Пусть существуют постоянные* $c_i>0$ $(i=\overline{1,4})$ *такие, что выполнены условие* 1) *в теоремах* 3.9 *и* 3.10. *Пусть* γ *в* (40) *удовлетворяет неравенству* $0<\gamma<\dfrac{4c_1}{c_2^2+4}$. *Пусть, далее, случайный процесс* $\xi(t,\omega)$ *удовлетворяет условию* (51).

Тогда нулевое решение $\left(x(t,\omega)\equiv 0,\ y(t,\omega)\equiv 0\right)$ *систем* (35) *и* (36) *устойчиво для всех* $t\ge t_0$ *при малых случайных возмущениях вида* $\sigma(x,y)\xi(t,\omega)$.

Доказательство теоремы 3.11 следует в силу теоремы 6.2 [5, с. 52] из оценок

$$\mathrm{V}(x,y) \ge y^2/2 + x^2/2 + \gamma xy \ge \lambda_0\left(x^2+y^2\right) > 0 \qquad \forall (x,y) \ne (0,0),$$

$$-\dot{\mathrm{V}}(x,y) \ge (c_1-\gamma)\,y^2 + \gamma c_k xy + \gamma c x^2 > \lambda_1\left(x^2+y^2\right) > 0 \qquad \forall (x,y) \ne (0,0),$$

где $c_k = c_1$ при $xy > 0$ и $c_k = c_2$ при $xy < 0$. Здесь $\dot{\mathrm{V}}$ есть производная функции (40) в силу детерминированной части систем (35) или (36)). Последние соотношения влекут за собой неравенства

$$\inf_{x^2+y^2\ge\delta^2} \mathrm{V}(x,y) > 0, \qquad \dot{\mathrm{V}}(x,y) < -c_\delta \quad \text{при} \quad x^2+y^2 > \delta^2$$

при любом $\delta > 0$. Теперь остается применить теорему 6.2 [5, с. 52]. Теорема 3.11 доказана.

Замечание. Утверждение теоремы 3.11 справедливо также и для системы (37), если функция φ удовлетворяет условию (49).

Примечания

1. Шумафов М.М., Панеш Т.А., Хаваджа М.А. Об устойчивости в целом по вероятности решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, возмущенных белым шумом. I // Вестник Адыгейского госуниверситета. Сер.: Естественно-математические и технические науки. 2021. Вып. 4 (291). С. 11–23. URL: http://vestnik.adygnet.ru
2. Шумафов М.М., Панеш Т.А., Хаваджа М.А. Об устойчивости в целом по вероятности решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, возмущенных белым шумом. II // Вестник Адыгейского госуниверситета. Сер.: Естественно-математические и технические науки. 2022. Вып. 1 (296). С. 11–30. URL: http://vestnik.adygnet.ru
3. Шумафов М.М., Панеш Т.А., Хаваджа М.А. Об устойчивости в целом по вероятности решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, возмущенных белым шумом. III // Вестник Адыгейского госуниверситета. Сер.: Естественно-математические и технические науки. 2022. Вып. 2 (301). С. 11–38. URL: http://vestnik.adygnet.ru
4. Шумафов М.М., Панеш Т.А., Хаваджа М.А. Об устойчивости в целом по вероятности решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, возмущенных белым шумом. IV // Вестник Адыгейского госуниверситета. Сер.: Естественно-математические и технические науки. 2022. Вып. 3 (306). С. 11–33. URL: http://vestnik.adygnet.ru
5. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях. Москва: Наука, 1969. 368 с.
6. Кушнер Г.Дж. Стохастическая устойчивость и управление. Москва: Мир, 1967. 200 с.
7. Ignatyev O., Mandrekar V. Barbashin-Krasovskii theorem for stochastic differential equations // Proc. American Math. Soc. 2010. Vol. 138, No. 11. P. 4123–4128.
8. Shumafov M.M. Second-order stochastic differential equations: stability, dissipativity, periodicity. V. – A Survey // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер.: Естественно-математические и технические науки. 2021. Вып. 3 (286). С. 11–31. URL: http://vestnik.adygnet.ru
9. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. Москва: Иностранная литература, 1961. 387 с.
10. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: Мир, 1964. 477 с.
11. Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р. Качественная теория дифференциальных уравнений. Москва: Наука, 1974. 318 с.

References

1. Shumafov M.M., Panesh T.A., Havadzha M.A. On the stochastic stability in the large of solutions of the nonlinear second-order differential equations perturbed by white noise. I // Bulletin of the Adyghe State University. Ser.: Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2021. Iss. 4 (291). P. 11–23. URL: http://vestnik.adygnet.ru
2. Shumafov M.M., Panesh T.A., Havadzha M.A. On the stochastic stability in the large of

solutions of the nonlinear second-order differential equations perturbed by white noise. II // Bulletin of the Adyghe State University. Ser.: Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2022. Iss. 1 (296). P. 11–30. URL: http://vestnik.adygnet.ru

3. Shumafov M.M., Panesh T.A., Havadzha M.A. On the stochastic stability in the large of solutions of the nonlinear second-order differential equations perturbed by white noise. III // Bulletin of the Adyghe State University. Ser.: Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2022. Iss. 2 (301). P. 11–38. URL: http://vestnik.adygnet.ru

4. Shumafov M.M., Panesh T.A., Havadzha M.A. On the stochastic stability in the large of solutions of the nonlinear second-order differential equations perturbed by white noise. IV // Bulletin of the Adyghe State University. Ser.: Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2022. Iss. 3 (306). P. 11–33. URL: http://vestnik.adygnet.ru

5. Khas'minskii R.Z. Stochastic Stability of Differential Equations. 2nd ed. Heidelberg; Dordrecht; London; New York: Springer, 2012. 339 p.

6. Kushner H.J. Stochastic Stability and Control. New York: Academ. Press, 1967. 198 p.

7. Ignatyev O., Mandrekar V. Barbashin-Krasovskii theorem for stochastic differential equations // Proc. American Math. Soc. 2010. Vol. 138, No. 11. P. 4123–4128.

8. Shumafov M.M. Second-order stochastic differential equations: stability, dissipativity, periodicity. V. – A Survey // Bulletin of the Adyghe State University. Ser.: Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2021. Iss. 3 (286). P. 11–31. URL: http://vestnik.adygnet.ru

9. Lefschetz S. Differential Equations: Geometric theory. New York; London: Interscience Publishers, 1957. 387 p.

10. Cesari L. Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations. Berlin; Gottingen; Heidelberg: Springer-Verlag, 1959. 477 p.

11. Reissig R., Sansone G., Conti R. Qualitative Theorie Nichtlinearer Differentialgleichungen. Edizioni Cremonese, 1963. 218 p.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 31.10.2022; *одобрена после рецензирования 20.11.2022*; *принята к публикации 21.11.2022*.

The article was submitted 31.10.2022; *approved after reviewing 20.11.2022*; *accepted for publication 21.11.2022*.