МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья
УДК 517.53/55
ББК 22.161.55
Ш 65
DOI: 10.53598/2410-3225-2023-1-316-11-20

К вопросу об аксиоматическом определении многозначных элементарных функций комплексной переменной

(*Рецензирована*)

Андрей Борисович Шишкин[1], Роман Геннадьевич Письменный[2]

[1] *Филиал Кубанского государственного университета*, *Славянск-на-Кубани*, *Россия*, *shishkin-home@mail.ru*
[2] *Славянский-на-Кубани государственный педагогический институт*, *Славянск-на-Кубани*, *Россия*, *Pirogen@mail.ru*

Аннотация. *Работа посвящена аксиоматическому определению основных элементарных функций комплексной переменной. Рассмотрены основные многозначные элементарные функции комплексной переменной. Упрощены аксиоматические определения аргумента комплексного числа и логарифмической функции. Обобщены аксиоматические определения многозначной степенной функции и многозначной экспоненты.*
Ключевые слова**:** *элементарные функции*, *многозначные элементарные функции*, *эвентуальные пары*

Original Research Paper

On the axiomatic definition of multi-valued elementary functions of a complex variable

Andrey B. Shishkin[1], Roman G. Pismenny[2]

[1] *Branch of Kuban State University, Slavyansk-on-Kuban*, *Russia*, *shishkin-home@mail.ru*
[2] *Slavyansk-on-Kuban State Pedagogical Institute*, *Slavyansk-on-Kuban*, *Russia*, *Pirogen@mail.ru*

Abstract. *The work is devoted to the axiomatic definition of the basic elementary functions of a complex variable. The main multi-valued elementary functions of a complex variable are considered. The axiomatic definitions of the argument of a complex number and logarithmic function are simplified. The axiomatic definitions of a multivalued power function and a multivalued exponent are generalized.*
Keywords**:** *elementary functions, multivalued elementary functions, eventual pairs*

1. Введение. В работах [1–4] развивается аксиоматическая теория основных элементарных функций действительной и комплексной переменных. В этой статье мы используем терминологию из работы [4]. Особое место в аксиоматической теории элементарных функций занимают основные многозначные элементарные функции комплексной переменной, к которым мы относим:

– многозначную константу;
– многозначную линейную функцию;
– аргумент;
– логарифмическую функцию;
– многозначную степенную функцию;
– многозначную экспоненту.

Аксиоматическое определение указанных многозначных функций предполагает решение систем функциональных уравнений

$$F(z+w)=F(z)+F(w),\quad F(z-w)=F(z)-F(w);$$
$$F(z+w)=F(z)F(w),\quad F(z-w)=F(z)/F(w);$$
$$F(zw)=F(z)+F(w),\quad F\left(z/w\right)=F(z)-F(w);$$
$$F(zw)=F(z)F(w),\quad F\left(z/w\right)=F(z)/F(w)$$

в классе непрерывных многозначных отображений комплексной плоскости. Каждая из указанных систем содержит соответствующее функциональное уравнение Коши и сопутствующее ему коуравнение. В основе решения таких систем лежит понятие «эвентуальной пары» (H,E). Это понятие является естественным обобщением понятия «начальные значения», используемого при решении известной задачи Коши. Каждая эвентуальная пара включает «начальный слой» H и «множество единственности» E. В качестве начального слоя выступает многозначный образ нейтрального элемента определяемой многозначной функции. Множество единственности служит для выделения единственного многозначного решения соответствующей системы функциональных уравнений. Оно предполагает указания однозначной ветви определяемой многозначной функции, определенной на этом множестве.

В работе [4] показано, что при аксиоматическом определении каждой из основных многозначных элементарных функций комплексной переменной в качестве «множества единственности» можно выбрать конечное множество $E:=\{1,\rho\}$, где ρ – произвольное иррациональное число. Особняком стоит лишь степенная функция с комплексным показателем. Для этой функции в качестве «множества единственности» можно взять, например, интервал действительной оси.

В этой статье мы развиваем обобщенный подход к определению основных многозначных элементарных функций комплексной переменной. При этом подходе степенная функция комплексной переменной не является исключением из общего наблюдения.

По теореме 5 в качестве «множества единственности» для степенной функции комплексной переменной тоже можно взять конечное множество $E:=\{1,\rho\}$, где ρ – произвольное иррациональное число. Можно положить, например, $\rho:=\pi$. По теореме 5 совокупность из двух точек 1, π является «множеством единственности» для степенной функции с комплексным показателем.

Теоремы 2–7 являются теоремами существования и единственности для основных многозначных элементарных функций комплексной переменной. Доказательства этих теорем требуют существенной подготовки. Они опираются на решение системы функциональных уравнений

$$F(x+y)=F(x)+F(y),\quad F(x-y)=F(x)-F(y)$$

в классе многозначных непрерывных отображений из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{C}$. Решение этой системы, в свою очередь, лежит в основе аксиоматического определения многозначной линейной функции действительной переменной с комплексным коэффициентом (теорема 1).

2. Многозначная линейная функция действительной переменной. Пусть $H \subseteq \mathbf{C}$ и $E \subseteq \mathbf{R}$ – непустые множества, a – фиксированное комплексное число. Аксиоматическое определение многозначной линейной функции действительной переменной можно сформулировать следующим образом: многозначной линейной функцией действительной переменной (с комплексным коэффициентом a и начальным слоем H) называется непрерывная многозначная функция F, определенная на множестве всех действительных чисел и удовлетворяющая аксиомам:

1) $F(x+y)=F(x)+F(y)$ для любых $x,y\in\mathbf{R}$;
2) $F(x-y)=F(x)-F(y)$ для любых $x,y\in\mathbf{R}$;
3) $F(0)=H$ и $ax\in F(x)$ для любого $x\in E$.

Данное определение зависит от выбора *начального слоя* $H\subseteq\mathbf{C}$ (множества значений функции в нуле) и *множества единственности* $E\subseteq\mathbf{R}$. Из аксиом 1), 2) и 3) следует, что начальный слой H должен удовлетворять условию $H=H+H=H-H$. Это означает, что начальный слой H является *подгруппой* $\mathbf{C}$ (подгруппой аддитивной группы поля $\mathbf{C}$). Условие $ax\in F(x)$ для любого $x\in E$ из аксиомы 3) означает, что сужение линейной (однозначной) функции $x\mapsto ax$ на множество E является однозначной ветвью многозначной функции F.

Пусть H – подгруппа $\mathbf{C}$ и $E\subseteq\mathbf{R}$. Рассмотрим многозначную функцию $F\,:\,x\mapsto ax+H$, определенную на $\mathbf{R}$. Естественным непрерывным представлением этой многозначной функции является множество $\{F_h\,:\,h\in H\}$, где $F_h\,:\,x\mapsto ax+h$ однозначные ветви F_h непрерывны на $\mathbf{R}$, значит, многозначная функция F является непрерывной многозначной функцией. При этом для любых $x,y\in\mathbf{R}$ имеем:

$$F(x+y)=a(x+y)+H=(ax+H)+(ay+H)=F(x)+F(y),$$
$$F(x-y)=a(x-y)+H=(ax+H)-(ay+H)=F(x)-F(y),$$
$$F(0)=0+H=H,\quad ax\in ax+H=F(x),\quad x\in E.$$

Следовательно, непрерывная многозначная функция $F\,:\,x\mapsto ax+H$ удовлетворяет аксиомам 1), 2) и 3). Это означает, что функция $x\mapsto ax+H$ является многозначной линейной функцией действительной переменной.

Множество единственности $E\subseteq\mathbf{R}$ подбирается из тех соображений, что определение многозначной линейной функции должно выделять единственную непрерывную многозначную функцию действительной переменной. Если это условие выполнено, то пару (H,E) называем *эвентуальной парой*. Отметим, что для выбранного начального слоя H множество единственности E желательно подбирать «наименьшим» из возможных.

Рассмотрим простейший пример эвентуальной пары. Пусть $H:=\{0\}$. Покажем, что в качестве множества единственности E можно взять одноэлементное множество $\{1\}$. Действительно, из аксиом 2) и 3) вытекает, что для любого x выполняются равенства $\{0\}=F(0)=F(x)-F(x)$. Из них следует, что множество $F(x)$ является одноэлементным множеством, то есть определяемая функция F является однозначной. В силу аксиомы 3) $F(1)=a$, значит, по аксиоматическому определению линейной (однозначной) функции действительной переменной функция F совпадает с функцией $x\mapsto ax$. Следовательно, пара $(\{0\},\{1\})$ является эвентуальной.

Вернемся к общей ситуации. Выберем произвольное положительное число δ. Справедливо следующее предложение.

Предложение 1. *Пусть* H *– произвольная подгруппа* $\mathbf{C}$, E *– интервал* $(0,\delta)$. *Определению многозначной линейной функции действительной переменной удовлетворяет единственная непрерывная многозначная функция* $x \mapsto ax + H$.

Доказательство. Предположим, что непрерывная многозначная функция F удовлетворяет аксиомам 1), 2) и 3). Пусть $x \in \mathbf{R}$ и $z \in F(x)$. По аксиоме 1) имеем $F(x) = F(x) + F(0)$. Это означает, что $z + F(0) \subseteq F(x)$. С другой стороны, если $z' \in F(x)$, то по аксиоме 2) справедливо включение $z' - z \in F(x) - F(x) = F(0)$ или $z' \in z + F(0)$. Значит, $F(x) \subseteq z + F(0)$ и

$$F(x) = z + F(0). \tag{1}$$

По аксиоме 2) выполняется равенство $F(-x) = F(0) - F(x)$. В силу равенства 1 имеем $F(-x) = F(0) - z + F(0)$. Следовательно,

$$F(-x) = -z + F(0). \tag{2}$$

Из равенств 1, 2 и аксиомы 3) вытекает, что $F(x) = ax + H$ и $F(-x) = -ax + H$ для любого $x \in E$. Значит, $F(x) = ax + H$ для любого $x \in (-\delta, \delta)$. Выберем произвольное действительное x. Существует такое натуральное N, что $x / N \in (-\delta, \delta)$, значит, по аксиоме 1) $F(x) = F(x/N) + ... + F(x/N) = ax/N + ... + ax/N + H = ax + H$. Следовательно, представление $F(x) = ax + H$ справедливо на всей числовой прямой. Таким образом, многозначная функция $F : x \mapsto ax + H$ по условиям 1), 2) и 3) находится однозначно. Естественным непрерывным представлением многозначной функции $F : x \mapsto ax + H$ является множество $\{F_h : h \in H\}$, где $F_h : x \mapsto ax + h$. Все ветви F_h непрерывны на $\mathbf{R}$, значит, многозначная функция $F : x \mapsto ax + H$ является непрерывной многозначной функцией. Предложение доказано.

Из предложения 1 вытекает, что для произвольной подгруппы $H \subseteq \mathbf{C}$ пара (H, E), где E – интервал $(0, \delta)$, является эвентуальной парой. Если подгруппа H удовлетворяет дополнительным условиям, то множество E можно «уменьшить».

3. Эвентуальные пары в дискретном случае. Подгруппу $H \subseteq \mathbf{C}$ называем *дискретной*, если она удовлетворяет следующим условиям:

4) существует такое $\varepsilon > 0$, что $|h| \ge \varepsilon$ для любого $h \in H \setminus \{0\}$;

5) существует такое $\rho \in \mathbf{R}$, что $\rho h_1 \ne h_2$ для любых $h_1, h_2 \in H \setminus \{0\}$.

Справедливо следующее предложение.

Лемма 1. *Если непрерывная многозначная функция* F *удовлетворяет условиям* 1) *и* 2) *из определения многозначной линейной функции действительной переменной и ее начальный слой* $H := F(0)$ *является дискретной подгруппой* $\mathbf{C}$, *то существует такое комплексное число* k, *что для всех действительных чисел* x *выполняется теоретико-множественное равенство* $F(x) = kx + H$.

Доказательство. Предположим, что непрерывная многозначная функция F удовлетворяет условиям 1), 2) и положительное ε выбрано из условия: $|h| \ge \varepsilon$ для любого $h \in H \setminus \{0\}$. Выберем произвольную непрерывную ветвь f функции F, принимающую нулевое значение в нуле. Пусть $x_0 > 0$, $[-x_0, x_0] \subseteq \operatorname{Dom} f$ и $|f(x)| < \varepsilon / 3$ на отрезке $[0, x_0]$. Обозначим x_n частное $x_0 / 2^n$. Тогда в силу (1)

$$f(x_0) + H = F(x_1) + F(x_1) = 2f(x_1) + H,$$

значит, $f(x_0) - 2f(x_1) =: h \in H$. Так как $|h| \le |f(x_0)| + 2|f(x_1)| < \varepsilon$, то $h = 0$. Следовательно, $f(x_0)/2 = f(x_1)$.

Аналогично, в силу (1)

$$f(x_{n-1}) + H = F(x_{n-1}) = F(x_n) + F(x_n) = 2f(x_n) + H$$

для любого натурального n. Значит, $f(x_0)/2^n = f(x_n)$ для любого $n \in \mathbf{N}$. С другой стороны, при любом $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$

$$f(2x_n) + H = F(2x_n) = F(x_n) + F(x_n) = 2f(x_n) + H,$$

значит, $f(2x_n) - 2f(x_n) =: h_n \in H$. Если $2x_n \in [0, x_0]$, то $|h_n| \le |f(2x_n)| + 2|f(x_n)| < \varepsilon$, следовательно, по условию 4) имеем $h_n = 0$ и $2f(x_n) = f(2x_n)$. Значит, $mf(x_n) = f(mx_n)$, если $m \in \mathbf{N}$ и $mx_n \in [0, x_0]$. Следовательно,

$$f(mx_n) = f\left(\frac{m}{2^n} x_0\right) = \frac{m}{2^n} f(x_0)$$

при условии $mx_n \in [0, x_0]$. Далее выберем произвольное $x \in (0, x_0]$ и произвольное натуральное N из условия $2^N \ge x_0 / x$. Для любого натурального $n \ge N$ символом m_n обозначим натуральное число, удовлетворяющее неравенствам

$$\frac{m_n}{2^n} \le \frac{x}{x_0} < \frac{m_n + 1}{2^n}.$$

Тогда $m_n x_n = \dfrac{m_n}{2^n} x_0 \in [0, x] \subseteq [0, x_0]$,

$$\left| x - \frac{m_n}{2^n} x_0 \right| = x - \frac{m_n}{2^n} x_0 < \frac{m_n + 1}{2^n} x_0 - \frac{m_n}{2^n} x_0 = \frac{x_0}{2^n} \to 0,$$

$$\left| \frac{x}{x_0} - \frac{m_n}{2^n} \right| = \frac{x}{x_0} - \frac{m_n}{2^n} < \frac{m_n + 1}{2^n} - \frac{m_n}{2^n} = \frac{1}{2^n} \to 0$$

при $n \to \infty$. Из последних соотношений и непрерывности функции f вытекает, что

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{m_n}{2^n} x_0\right) = f(x_0) \lim_{n\to\infty} \frac{m}{2^n} = \frac{f(x_0)}{x_0} x,$$

если $x \in [0, x_0]$. В силу равенств (1) и (2) для любых $x \in (0, x_0)$ имеем $F(x) = kx + H$ и $F(-x) = -kx + H$, где $k := f(x_0)/x_0$. Значит, представление $F(x) = kx + H$ справедливо для всех $x \in (-x_0, x_0)$. Это представление единственным образом распространяется на всю числовую прямую (см. доказательство предложения 1). Лемма доказана.

Если H – дискретная подгруппа $\mathbf{C}$ и $E := \{1, \rho\}$, где ρ – действительное число из условия 5), то пара (H, E) является эвентуальной. Действительно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если H – дискретная подгруппа $\mathbf{C}$ и $E := \{1, \rho\}$, где ρ – действительное число из условия* 5), *то определению многозначной линейной функции действительной переменной удовлетворяет единственная непрерывная многозначная функция $x \mapsto ax + H$.*

Доказательство. Предположим, что непрерывная многозначная функция F удовлетворяет определению многозначной линейной функции действительной переменной. По лемме 1 для всех действительных x имеет место представление $F(x) = kx + H$, где k – некоторое комплексное число. Нам осталось показать, что константа k из полученного представления совпадает с a. Для этого воспользуемся аксиомой 3). По этой аксиоме $F(1)=a+H=k+H$ и $F(\rho)=a\rho+H=k\rho+H$. Из этих соотношений вытекает, что $k=a+h_1$, $k\rho=a\rho+h_2$, где $h_1,h_2\in H$. Значит, $\rho h_1=h_2$. В силу условия 5) имеем $h_1=h_2=0$. Следовательно, $a=k$ и $F(x)=ax+H$ для любого $x\in\mathbf{R}$. Теорема доказана.

4. Многозначная линейная функция комплексной переменной. Пусть (H,E) – эвентуальная пара. Линейной многозначной функцией комплексной переменной (с комплексным коэффициентом a и начальным слоем H) называется непрерывная многозначная функция, определенная на множестве всех комплексных чисел и удовлетворяющая аксиомам:

6) $F(z+w)=F(z)+F(w)$ для любых $z,w\in\mathbf{C}$;

7) $F(z-w)=F(z)-F(w)$ для любых $z,w\in\mathbf{C}$;

8) $F(0)=H$ и $\alpha z\in F(z)$ для любого $z\in E\cup iE$.

Легко проверить, что многозначная функция $z\mapsto az+H$ удовлетворяет аксиомам 6), 7) и 8). Убедимся, что эти условия определяют функцию F однозначно. Действительно, пусть непрерывная многозначная функция F удовлетворяет указанным аксиомам и $z:=x+iy\in\mathbf{C}$. Тогда

$$F(z)=F(x)+F(iy)=F_1(x)+F_2(y).$$

Здесь F_1 и F_2 – многозначные функции действительной переменной, определенные по правилу: $F_1(x):=F(x)$ и $F_2(x)=F(ix)$ для любого $x\in\mathbf{R}$. Функции F_1 и F_2 являются непрерывными многозначными функциями вещественной переменной. Они определены всюду на $\mathbf{R}$ и удовлетворяют аксиомам 1) и 2) из определения многозначной линейной функции действительной переменной. При этом $F_1(0)=H$, $F_2(0)=H$, $ax\in F_1(x)$ и $aix\in F_2(x)$ для любого $x\in E$. Значит, по определению многозначной линейной функции действительной переменной для любого $x\in\mathbf{R}$ имеем $F_1(x)=ax+H$ и $F_2(x)=aix+H$. Следовательно, для любого $z:=x+iy\in\mathbf{C}$ имеем $F(z)=F_1(x)+F_2(y)=\alpha z+H$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если* (H,E) *– эвентуальная пара, то аксиомам* 6), 7) *и* 8) *удовлетворяет единственная непрерывная многозначная функция* $z\mapsto az+H$.

5. Аргумент комплексного числа. Пусть $H:=2\pi\mathbf{Z}$ и $E:=\{1,\rho\}$, где ρ – произвольное иррациональное число. Подгруппа $H\subseteq\mathbf{C}$ является дискретной. Она удовлетворяет условию 4), например, при $\varepsilon:=2\pi$ и удовлетворяет условию 5) при любом иррациональном ρ. В силу теоремы 1 пара (H,E) является эвентуальной. Аргументом называется непрерывная многозначная функция, определенная на множестве $\mathbf{C}$ всех отличных от нуля комплексных чисел и удовлетворяющая аксиомам:

9) $F(zw)=F(z)+F(w)$ для любых $z,w\in\mathbf{C}$;

10) $F\left(z/w\right)=F(z)-F(w)$ для любых $z,w\in\mathbf{C}$;

11) $F(1)=H$ и $\operatorname{Im}z\in F(e^z)$ для любого $z\in E\cup iE$.

Убедимся, что условия 9), 10) и 11) определяют аргумент комплексного числа однозначно. Предположим, что непрерывная многозначная функция F определена на $\mathbf{C}$ и удовлетворяет этим условиям. Пусть

$$F_1(x):=F(e^x),\quad F_2(x):=F(e^{xi})$$

для любого вещественного x. Многозначные функции F_1 и F_2 определены на $\mathbf{R}$ и непрерывны. Легко убедиться, что они удовлетворяют аксиомам 1) и 2). При этом, во-первых, $F_1(0)=H$, $0=\operatorname{Im}1\in F(e)=F_1(1)$ и $0=\operatorname{Im}\rho\in F(e^{\rho})=F_1(\rho)$. Значит, при $a=0$ имеем $ax\in F_1(x)$ для любого $x\in E$. По теореме 1 функция F_1 совпадает с многозначной константой $x\mapsto H$. Во-вторых, $F_2(0)=H$, $1=\operatorname{Im}i\in F(e^{i})=F_2(1)$ и $\rho=\operatorname{Im}\rho i\in F(e^{\rho i})=F_2(\rho)$. Значит, при $a=1$ имеем $ax\in F_2(x)$ для любого $x\in E$. По теореме 1 функция F_2 совпадает с линейной функцией $x\mapsto x+H$. Если $z:=x+iy\neq 0$, то возможно представление $z=|z|e^{i\phi}$, где ϕ – произвольное решение системы уравнений

$$\cos\phi = x/|z|,\ \sin\phi = y/|z|. \tag{3}$$

При этом

$$F(r)=F\left(e^{\ln r}\right)=F_1(\ln r),\quad F(e^{i\phi})=F_2\left(\phi\right).$$

Значит,

$$F(z)=F(|z|)+F(e^{i\phi})=F_1(\ln|z|)+F_2\left(\phi\right)=\phi+2\pi\mathbf{Z},$$

то есть образ $F(z)$ совпадает с множеством всех решений системы уравнений (3) (что согласуется с известным определением аргумента $\operatorname{Arg}z$ комплексного числа $z\neq 0$). Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Если* $H:=2\pi\mathbf{Z}$ *и* $E:=\{1,\rho\}$, *где* ρ *– произвольное иррациональное число, то определению аргумента удовлетворяет единственная непрерывная многозначная функция* $z\mapsto\phi+2\pi\mathbf{Z}$, *где* ϕ *– произвольное решение системы уравнений* (3).

6. Логарифмическая функция. Начальный слой H логарифмической функции комплексной переменной определяется путем решения уравнения $\exp z=1$. По определению функции $z\mapsto\exp z$ для произвольного решения $z:=x+iy$ этого уравнения имеем $e^{x}(\cos y+i\sin y)=1$, значит, $x=0$, $\cos y=1$ и $\sin y=0$. Следовательно, $y\in 2\pi\mathbf{Z}$. Это позволяет определить начальный слой H как множество $2\pi i\mathbf{Z}$. В качестве множества единственности E, как и прежде, берем множество $\{1,\rho\}$, где ρ – произвольное иррациональное число. При таком выборе множеств H и E пара (H,E) является эвентуальной, и аксиоматическое определение логарифмической функции принимает следующий вид. Логарифмической функцией комплексной переменной называется непрерывная многозначная функция, определенная на множестве $\mathbf{C}$ всех отличных от нуля комплексных чисел и удовлетворяющая следующим условиям:

12) $F(zw)=F(z)+F(w)$ для любых $z,w\in\mathbf{C}$;

13) $F\left(z/w\right)=F(z)-F(w)$ для любых $z,w\in\mathbf{C}$;

14) $F(1)=H$ и $z\in F(e^{z})$, если $z\in E\cup iE$.

Предположим, что некоторая непрерывная многозначная функция F определена на $\mathbf{C}$ и удовлетворяет условиям 12), 13) и 14). Для любых вещественных r и ϕ имеем $F(re^{i\phi})=F(r)+F\left(e^{i\phi}\right)=F_1(\ln r)+F_2\left(\phi\right)$, где

$$F_1(x):=F\left(e^{x}\right),\quad F_2(x):=F\left(e^{ix}\right)$$

для любых $x,y\in\mathbf{R}$. Комплексные многозначные функции F_1 и F_2 определены всюду на $\mathbf{R}$ и являются непрерывными. Легко убедиться, что они удовлетворяют аксиомам 1) и 2) из определения линейной многозначной функции вещественной переменной. При этом, во-первых, $F_1(0)=F(1)=H$, $1\in F(e)=F_1(1)$ и $\rho\in F(e^{\rho})=F_1(\rho)$. Значит, при $a=1$ имеем $ax\in F_1(x)$ для любого $x\in E$. По теореме 1 функция F_1 совпадает с линейной функцией $x\mapsto x+2\pi i\mathbf{Z}$. Во-вторых, $F_2(0)=F(1)=H$, $i\in F(e^i)=F_2(1)$ и $\rho i\in F(e^{i\rho})=F_2(\rho)$. Значит, при $a=i$ имеем $ax\in F_2(x)$ для любого $x\in E$. По теореме 1 функция F_2 совпадает с линейной функцией $x\mapsto ix+2\pi i\mathbf{Z}$. Если $r:=|z|\neq 0$ и $\phi\in \operatorname{Arg} z$, то

$$F(z)=F_1(\ln r)+F_2\left(\phi\right)=\ln r+i\phi+2\pi i\mathbf{Z}.$$

Значит, $F(z)=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z$. Таким образом, условия 12), 13) и 14) определяют многозначную функцию F однозначно, то есть справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Если $H:=2\pi i\mathbf{Z}$ и $E:=\{1,\rho\}$, где ρ – произвольное иррациональное число, то определению логарифмической функции комплексной переменной удовлетворяет единственная непрерывная многозначная функция $z\mapsto \ln|z|+i\operatorname{Arg} z$.*

7. Степенная функция. Для аксиоматического определения степенной функции Φ с комплексным показателем $\alpha:=a+ib\neq 0$ необходимо определить начальный слой этой функции $\Phi(1)$ и множество единственности. Описание начального слоя $\Phi(1)$ можно получить из следующих соображений. Если $r\in\mathbf{Q}$, то $1^r=\exp\left(ri\operatorname{Arg}1\right)$. При этом $\operatorname{Arg}1=2\pi\mathbf{Z}$. Следовательно, $1^r=\exp 2\pi ri\mathbf{Z}$. Значит, для произвольного комплексного показателя $\alpha\in\mathbf{C}$ можно положить $\Phi(1):=\exp 2\pi\alpha i\mathbf{Z}$.

Степенная функция Φ с комплексным показателем α определяется как композиция $\exp\circ F$, где F – непрерывная многозначная функция, определенная на множестве всех отличных от нуля комплексных чисел и удовлетворяющая следующим условиям:

15) $F(zw)=F(z)+F(w)$ для любых $z,w\in\mathbf{C}$;

16) $F\left(z/w\right)=F(z)-F(w)$ для любых $z,w\in\mathbf{C}$;

17) $F(1)=H$ и $\alpha z\in F(z)$, если $z\in E\cup iE$.

Предположим, что некоторая непрерывная многозначная функция F определена на $\mathbf{C}$ и удовлетворяет условиям 15), 16) и 17). Замечаем, что функция $F(e^z)$ удовлетворяет определению многозначной линейной функции комплексной переменной. При этом пара $(2\pi\alpha i\mathbf{Z};\{1;\rho\})$, где ρ – произвольное иррациональное число, является эвентуальной. Значит, по теореме 2 функция F совпадает с линейной многозначной функцией комплексной переменной $z\mapsto \alpha z+2\pi\alpha i\mathbf{Z}$. Следовательно,

$$F(z)=F(e^{\operatorname{Ln} z})=\alpha\operatorname{Ln} z+2\pi\alpha i\mathbf{Z}=\alpha\operatorname{Ln} z \text{ и } \Phi(z)=\exp\alpha\operatorname{Ln} z.$$

Теорема 5. *Если $H:=2\pi i\alpha\mathbf{Z}$ и $E:=\{1,\rho\}$, где ρ – произвольное иррациональное число, то среди композиций $\exp\circ F$, где F – непрерывная многозначная функция, определенная на множестве всех отличных от нуля комплексных чисел, определению степенной функции с комплексным показателем α удовлетворяет лишь функция $z\mapsto\exp\alpha\operatorname{Ln} z$.*

8. Общая степенная функция. Пусть $H\subseteq\mathbf{C}$, $E\subseteq\mathbf{R}$ и пара $(\operatorname{Ln} H,E)$ является эвентуальной парой. Общая степенная функция с комплексным показателем α определяется как непрерывная многозначная функция F, определенная на множестве всех отличных от нуля комплексных чисел и удовлетворяющая следующим условиям:

18) $F(zw) = F(z)F(w)$ для любых $z, w \in \mathbf{C}$;

19) $F\left(z / w\right) = F(z) / F(w)$ для любых $z, w \in \mathbf{C}$;

20) $F(1) = H$ и $e^{\alpha z} \in F(e^z)$, если $z \in E \cup iE$.

Предположим, что некоторая непрерывная многозначная функция F определена на $\mathbf{C}$ и удовлетворяет аксиомам 18), 19) и 20). В силу аксиомы 19) $F(z) \neq 0$ для любого $z \in \mathbf{C}$. Рассмотрим непрерывную многозначную функцию Φ, определяемую по правилу $\Phi(z) := \operatorname{Ln} F(e^z)$, $z \in \mathbf{C}$. Многозначная функция Φ удовлетворяет аксиомам 6) и 7) из определения многозначной линейной функции комплексной переменной. Действительно,

$$\Phi(z+w) = \operatorname{Ln} F(e^{z+w}) = \operatorname{Ln} F(e^z) + \operatorname{Ln} F(e^w) = \Phi(z) + \Phi(w),$$

$$\Phi(z-w) = \operatorname{Ln} F(e^{z-w}) = \operatorname{Ln} F(e^z) - \operatorname{Ln} F(e^w) = \Phi(z) - \Phi(w)$$

для любых $z, w \in \mathbf{C}$. При этом $\Phi(0) = F(1) = \operatorname{Ln} H$ и $\alpha z \in \operatorname{Ln} e^{\alpha z} \subseteq \operatorname{Ln} F(e^z) = \Phi(z)$ для любого $z \in E \cup iE$. Так как пара $(\operatorname{Ln} H, E)$ предполагается эвентуальной, то по теореме 2 функция Φ совпадает с многозначной линейной функцией $z \mapsto \alpha z + H$. Логарифмическая функция комплексной переменной является обратной многозначной функцией к функции $w \mapsto \exp w$, значит, $\exp\left(\operatorname{Ln} z\right) = z$ для любого $z \in \mathbf{C}$. Следовательно,

$$F(e^z) = \exp \operatorname{Ln} F(e^z) = \exp \Phi(z) = \exp(\alpha z + H)$$

для любого $z \in \mathbf{C}$. Отсюда вытекает, что $F(z) = F(e^{\operatorname{Ln} z}) = \exp(\alpha \operatorname{Ln} z + H)$ для любого $z \in \mathbf{C}$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Определению общей степенной функции с комплексным показателем* α *удовлетворяет единственная непрерывная многозначная функция* $z \mapsto \exp(\alpha \operatorname{Ln} z + H)$.

9. Многозначная экспонента. Пусть $H \subseteq \mathbf{C}$, $E \subseteq \mathbf{R}$ и пара $(\operatorname{Ln} H, E)$ является эвентуальной парой. Многозначной экспонентой с показателем $\alpha \in \mathbf{C}$ называется непрерывная многозначная функция F, определенная на множестве всех комплексных чисел и удовлетворяющая аксиомам:

21) $F(z+w) = F(z)F(w)$ для любых $z, w \in \mathbf{C}$;

22) $F(z-w) = F(z) / F(w)$ для любых $z, w \in \mathbf{C}$;

23) $F(0) = H$ и $e^{\alpha z} \in F(z)$ для любого $z \in E \cap iE$.

Предположим, что некоторая непрерывная многозначная функция F удовлетворяет аксиомам 21), 22) и 23). В силу аксиомы 22) $F(z) \neq 0$ для любого $z \in \mathbf{C}$. Рассмотрим непрерывную многозначную функцию Φ, определяемую по правилу $z \mapsto \operatorname{Ln} F\left(z\right)$. В силу аксиом 21) и 22)

$$\Phi(z+w) = \operatorname{Ln} F\left(z+w\right) = \operatorname{Ln} F\left(z\right) + \operatorname{Ln} F\left(w\right) = \Phi(z) + \Phi(w),$$

$$\Phi(z-w) = \operatorname{Ln} F\left(z-w\right) = \operatorname{Ln} F\left(z\right) - \operatorname{Ln} F\left(w\right) = \Phi(z) - \Phi(w)$$

для любых $z, w \in \mathbf{C}$. При этом в силу аксиомы 23) $\Phi(0) = \operatorname{Ln} H$ и выполняются включения $\alpha z \in \operatorname{Ln} e^{\alpha z} \subseteq \operatorname{Ln} F(z) = \Phi(z)$ для любого $z \in E \cap iE$. По условию пара $(\operatorname{Ln} H, E)$ является эвентуальной, значит, по теореме 2 функция Φ совпадает с линейной многозначной функцией комплексной переменной $z \mapsto \alpha z + H$. Значит,

$$F(z) = \exp\left(\operatorname{Ln} F\left(z\right)\right) = \exp \Phi(z) = \exp\left(\alpha z + H\right)$$

для всех $z \in \mathbf{C}$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Определению многозначной экспоненты с комплексным показателем* α *удовлетворяет единственная непрерывная многозначная функция* $z \mapsto \exp(\alpha z + H)$.

Примечания

1. Shishkin A.B., Pismennyiy R.G. Axiomatic Determination of Elementary Multi Valued Functions for a Complex Variable // International Journal of Applied Engineering Research (IJAER). 2015. No. 10 (3). P. 6467–6477.
2. Шишкин А.Б. Элементарные функции комплексной переменной: учеб. пособие для студентов, обучающихся по естественно-математическим профилям пед. образования. Славянск-на-Кубани: Филиал КубГУ, 2016. 127 с.
3. Шишкин А.Б. К вопросу об аксиоматическом определении тригонометрических функций // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер.: Естественно-математические и технические науки. 2020. Вып. 1 (256). С. 21–33. URL: http://vestnik.adygnet.ru
4. Шишкин А.Б. Введение в аксиоматическую теорию элементарных функций: учеб. пособие. Москва: ИНФРА-М, 2021. 169 с. DOI: 10.12737/1209581

References

1. Shishkin A.B., Pismennyiy R.G. Axiomatic Determination of Elementary Multi-Valued Functions for a Complex Variable // International Journal of Applied Engineering Research (IJAER). 2015. No. 10 (3). P. 6467–6477.
2. Shishkin A.B. Elementary functions of a complex variable: a manual for students studying natural-mathematical profiles of ped. education. Slavyansk-on-Kuban: Branch of KubGU, 2016. 127 p.
3. Shishkin A.B. On axiomatic definition of trigonometric functions // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser.: Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2020. Iss. 1 (256). P. 21–33. URL: http://vestnik.adygnet.ru
4. Shishkin A.B. Introduction to the axiomatic theory of elementary functions: a manual. Moscow: INFRA-M, 2021. 169 p. DOI: 10.12737/1209581

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 25.02.2023; *одобрена после рецензирования 17.03.2023*; *принята к публикации 18.03.2023.*

The article was submitted 25.02.2023; *approved after reviewing 17.03.2023*; *accepted for publication 18.03.2023.*