МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья
УДК 517.925
ББК 22.161.6
Р 65
DOI: 10.53598/2410-3225-2023-2-321-11-18

О бифуркациях сепаратрисных контуров динамических систем, инвариантных относительно конечной группы вращений

(*Рецензирована*)

Владимир Шлеймович Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет, Ярославль, Россия, vroitenberg@mail.ru

Аннотация. *Рассматриваются двухпараметрические семейства векторных полей на плоскости, инвариантных относительно вращения на угол* $2\pi/n$. *При нулевых значениях параметров предполагается, что векторное поле имеет контур из грубых седел, отличных от начала координат, и их сепаратрис, инвариантный относительно вращения. В случаях общего положения описываются бифуркационные диаграммы таких семейств.*

Ключевые слова: *векторное поле на плоскости, вращение плоскости, инвариантность, сепаратрисный контур, типичность, бифуркационная диаграмма*

Original Research Paper

On bifurcations of separatrix contours of dynamical systems invariant under a finite group of rotations

Vladimir Sh. Roytenberg

Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russia, vroitenberg@mail.ru

Abstract. *The article considers families of vector fields on the plane that are invariant under rotation through angle* $2\pi/n$. *At zero values of the parameters, it is assumed that the vector field has a contour of rough saddles, different from the origin, and their separatrices, invariant under rotation. In cases of general position, bifurcation diagrams of such families are described.*

Keywords: *planar vector field, rotation of the plane, invariance, separatrix contour, generality, bifurcation diagram*

Поскольку гладкие динамические системы, описывающие некоторые реальные процессы, имеют естественную симметрию, то разумно изучать бифуркации в классах систем с различного вида симметрий. Таким исследованиям посвящен ряд работ [1–4]. В основном рассматривались локальные бифуркации. Что касается нелокальных бифуркаций, то здесь пока имеется мало результатов даже в случае систем с «простейшей» – центральной симметрией [5, 6].

В настоящей работе мы исследуем нелокальные бифуркации в классе систем на плоскости, инвариантных относительно конечной группы вращений. Ряд других бифуркаций таких систем был описан в [7].

Будем рассматривать C^r-векторные поля X в $D := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$, инвариантные относительно вращений на углы $\theta_m = 2\pi m/n$, $n \in \mathbf{N}$, $n \ge 2$, $m \in \mathbf{Z}$:

$X(R_m x) = R_m X(x)$, где $R_m : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $R_m x := (x_1 \cos\theta_m - x_2 \sin\theta_m,\, x_1 \sin\theta_m + x_2 \cos\theta_m)$.

Обозначим $\mathrm{X}^r(D,n)$ банахово пространство таких векторных полей с C^r-нормой.

Рассмотрим семейство $\{X_\varepsilon\}$ векторных полей

$$X_\varepsilon(x) = P_1(x,\varepsilon)\partial/\partial x_1 + P_2(x,\varepsilon)\partial/\partial x_2 \in \mathrm{X}^r(D,n),$$

зависящих от двумерного параметра $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, меняющегося в окрестности нуля, где $P_1, P_2 \in C^r$ ($r \ge 3$). На векторное поле X_0 наложим условия, выделяющие в пространстве $\mathrm{X}^r(D,n)$ подмногообразия коразмерности два. Условия, налагаемые на семейство X_ε, будут означать его трансверсальность в точке $\varepsilon = 0$ указанному подмногообразию.

Пусть векторное поле X_0 имеет $2n$ различных седел $z_1^0, z_2^0, ..., z_{2n}^0 \in \operatorname{int} D$, $k = 1,2,...,2n$, таких, что $\forall k = 1,2,...,2n$ $z_{k+2}^0 = R_1 z_k^0$ (здесь $z_{2n+1}^0 := z_1^0$, $z_{2n+2}^0 := z_2^0$). Пусть $\lambda_{k1}^0 > 0$ и $\lambda_{k2}^0 < 0$ – собственные значения матрицы линейной части поля X_0 в седле z_k^0, а $\lambda_k^0 := -\lambda_{k2}^0 / \lambda_{k1}^0 > 0$ – седловой индекс. Ясно, что $\lambda_k^0 = \lambda_1^0$, если k – нечетно, и $\lambda_k^0 = \lambda_2^0$, если k – четно. Будем считать, что $\lambda_1^0 \lambda_2^0 \ne 1$. Предположим также, что поле X_0 имеет траектории L_1^0 и L_2^0 такие, что L_1^0 (L_2^0) α-предельна к z_1^0 (z_2^0) и ω-предельна к z_2^0 (z_3^0). Тогда для $m = 0,1,...,n-1$ траектория $L_{2m+1}^0 := R_m L_1^0$ ($L_{2m+2}^0 := R_m L_2^0$) α-предельна к z_{2m+1}^0 (z_{2m+2}^0) и ω-предельна к z_{2m+2}^0 (z_{2m+3}^0). Контур $L^0 := \{z_1^0\} \cup L_1^0 \cup \{z_2^0\} \cup L_2^0 \cup ... \cup \{z_{2n}^0\} \cup L_n^0$ – простая замкнутая кусочно-гладкая кривая. Возможны два варианта.

(А) Сепаратрисы седел $z_1^0, z_2^0, ..., z_{2n}^0$, отличные от $L_1^0, ..., L_n^0$, лежат по одну сторону от контура L^0, то есть принадлежат одной компоненте $\mathbf{R}^2 \setminus L^0$ (рис. 1).

(Б) Сепаратрисы седел z_k^0, $k = 1,2,...,2n$, отличные от $L_1^0, ..., L_n^0$, для нечетных k лежат по одну сторону от контура L^0, а для четных k – по другую сторону от L^0 (рис. 2).

В случае (А) при $\lambda_1^0 \lambda_2^0 > 1$ ($\lambda_1^0 \lambda_2^0 < 1$) контур L^0 является ω-предельным (α-предельным) множеством для траекторий. В случае (Б) контур L^0 не является ни ω-, ни α-предельным множеством.

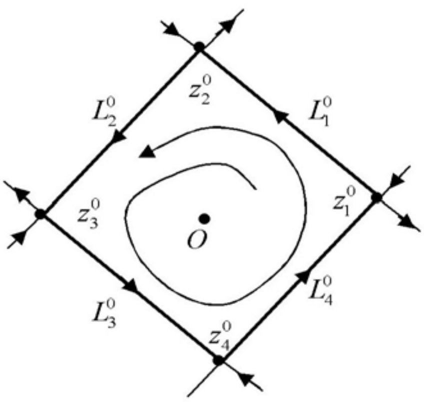

Рис. 1. Контур из четырех седел и их сепаратрис в случае (А)
Fig. 1. Contour of four saddles and their separatrices in the case (A)

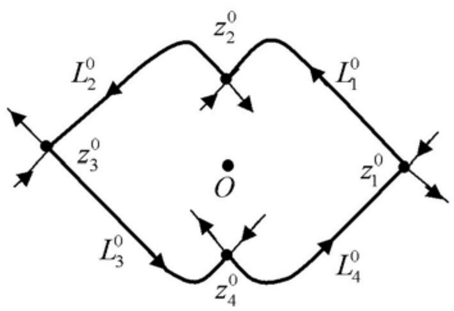

Рис. 2. Контур из четырех седел и их сепаратрис в случае (Б)
Fig. 2. Contour of four saddles and their separatrices in the case (B)

В обоих случаях (А) и (Б) выберем C^∞-дуги $\tau_i : (-1,1) \to \mathbf{R}^2$, $i = 1,2$, трансверсальные траекториям поля X_0, так, чтобы $\tau_i(0) \in L_i^0$, а дуги $\tau_1(-1,0)$, $\tau_2(0,1)$ и сепаратрисы седла z_2^0, не содержащиеся в L^0, принадлежали одной компоненте $\mathbf{R}^2 \setminus L^0$.

При значениях параметра ε, достаточно близких к нулю, у векторного поля X_ε имеются седла $z_k(\varepsilon)$, $k = 1,2,...,2n$, с седловым индексом $\lambda_k(\varepsilon)$ такие, что $z_k(\cdot) \in C^r$, $z_k(0) = z_k^0$, $\lambda_k(\cdot) \in C^{r-1}$, $\lambda_k(0) = \lambda_k^0$, $z_{k+2}(\varepsilon) = R_1 z_k(\varepsilon)$ (здесь $z_{2n+1}(\varepsilon) := z_1(\varepsilon)$, $z_{2n+2}(\varepsilon) := z_2(\varepsilon)$).

Так как инвариантные многообразия седел C^{r-1}-гладко зависят от ε, то при ε, достаточно близких к нулю, седло $z_i(\varepsilon)$ ($z_{i+1}(\varepsilon)$), $i = 1,2$, имеет выходящую (входящую) сепаратрису $L_{i,\alpha}(\varepsilon)$ ($L_{i+1,\omega}(\varepsilon)$), пересекающую $\tau_i(-1,1)$ в точке $\tau_i(u_{i,\alpha}(\varepsilon))$ ($\tau_i(u_{i,\omega}(\varepsilon))$), где $u_{i,\alpha}(\cdot), u_{i,\omega}(\cdot) \in C^{r-1}$, $u_{i,\alpha}(0) = u_{i,\omega}(0) = 0$. Тогда $L_{2m+i,\alpha}(\varepsilon) := R_m L_{i,\alpha}(\varepsilon)$ ($L_{2m+i+1,\omega}(\varepsilon) := R_m L_{i+1,\omega}(\varepsilon)$) – выходящая (входящая) сепаратриса седла $z_{2m+i}(\varepsilon)$ ($z_{2m+i+1}(\varepsilon)$). Обозначим $u_i(\varepsilon) := u_{i,\alpha}(\varepsilon) - u_{i,\omega}(\varepsilon)$ и потребуем, чтобы $\det(\partial u_i(0) / \partial \varepsilon_j) \neq 0$. Сделав замену параметров $\tilde{\varepsilon}_1 = u_1(\varepsilon), \tilde{\varepsilon}_2 = u_2(\varepsilon)$ и возвратившись к их прежним обозначениям, можно полагать, что при некотором $\delta_0 > 0$ будем иметь $\forall \varepsilon \in (-\delta_0, \delta_0)^2$ $u_1(\varepsilon) = \varepsilon_1, u_2(\varepsilon) = \varepsilon_2$.

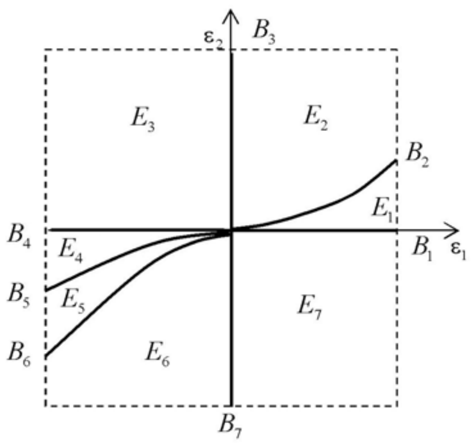

Рис. 3. Бифуркационная диаграмма
в случае (А), $\lambda_1^0 < 1$, $\lambda_2^0 > 1$, $\lambda_1^0 \lambda_2^0 < 1$

Fig. 3. Bifurcation diagram
in the case (A), $\lambda_1^0 < 1$, $\lambda_2^0 > 1$, $\lambda_1^0 \lambda_2^0 < 1$

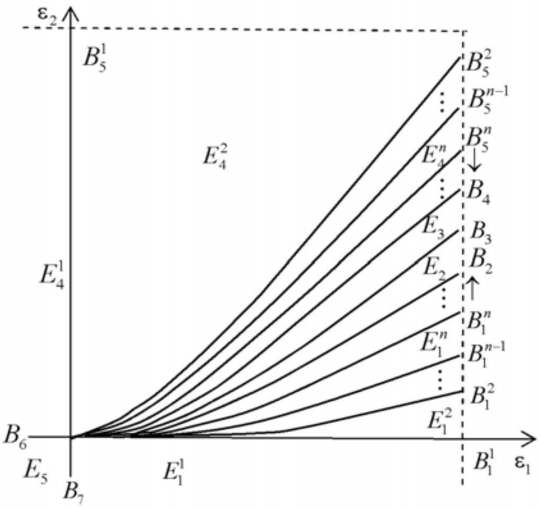

Рис. 4. Бифуркационная диаграмма
в случае (Б), $\lambda_1^0 < 1$, $\lambda_2^0 > 1$, $\lambda_1^0 \lambda_2^0 < 1$

Fig. 4. Bifurcation diagram
in the case (B), $\lambda_1^0 < 1$, $\lambda_2^0 > 1$, $\lambda_1^0 \lambda_2^0 < 1$

Теорема 1. *Пусть* $\lambda_1^0 < 1$, $\lambda_2^0 > 1$, $\lambda_1^0 \lambda_2^0 < 1$, *и имеет место случай* (А). *Тогда существует окрестность* $V(L^0) = R_1(V(L^0))$ *контура* L^0, *число* $\delta \in (0, \delta_0)$ *и представление области параметров* $(-\delta, \delta)^2$ *в виде объединения множеств* $B_0 = \{(0,0)\}$, B_i, E_i, $i = 1,2,...,7$, *где* (*рис.* 3)

$B_2 = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = b_2(\varepsilon_1)\}$, $b_2 : (0,\delta) \to (0,\delta)$, $b_2 \in C^{r-1}$, $b_2(+0) = b_2'(+0) = 0$,

$B_k = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = b_k(\varepsilon_1)\}$, $b_k : (-\delta,0) \to (-\delta,0)$, $b_k \in C^{r-1}$, $b_k(-0) = b_k'(-0) = 0$, $k = 5,6$,

$B_1 = (0,\delta) \times \{0\}$, $B_3 = \{0\} \times (0,\delta)$, $B_4 = (-\delta,0) \times \{0\}$, $B_7 = \{0\} \times (-\delta,0)$,

со следующими свойствами:

– *Особыми точками поля* X_ε *в* $V(L^0)$ *являются седла* $z_k(\varepsilon)$, $k = 1,...,2n$, *и только они*;

– *При* $\varepsilon \in E_2 \cup B_3 \cup E_3 \cup B_4 \cup E_4 \cup B_5 \cup B_6$ *поле* X_ε *имеет в* $V(L^0)$ *единственную замкнутую траекторию* $\Gamma(\varepsilon)$, *являющуюся двойным циклом, если* $\varepsilon \in B_6$, *и неустойчивым циклом в остальных случаях. При* $\varepsilon \in \mathrm{E}_5$ *поле* X_ε *имеет в* $V(L^0)$ *две замкнутые траектории, неустойчивый цикл* $\Gamma_1(\varepsilon)$ *и устойчивый цикл* $\Gamma_2(\varepsilon)$. *При всех ос-*

тальных $\varepsilon\in(-\delta,\delta)^2$ *замкнутых траекторий в* $V(L^0)$ *нет;*

– Сепаратрисы $L_{m,\alpha}(\varepsilon)$ *и* $L_{m+1,\omega}(\varepsilon)$ *при нечетных (четных)* m *не выходят из* $V(L^0)$ *и совпадают, если* $\varepsilon\in B_3\cup B_7$ $(\varepsilon\in B_1\cup B_4)$. *Сепаратрисы* $L_{m,\alpha}(\varepsilon)$ *и* $L_{m+2,\omega}(\varepsilon)$ *при нечетных (четных)* m *не выходят из* $V(L^0)$ *и совпадают, образуя вместе с седлами неустойчивый (устойчивый) контур, если* $\varepsilon\in B_2$ $(\varepsilon\in B_5)$;

– Сепаратриса $L_{m,\alpha}(\varepsilon)$ *при нечетных* m *выходит из* $V(L^0)$, *если* $\varepsilon\notin B_2\cup B_3\cup B_7$;

– Сепаратриса $L_{m,\alpha}(\varepsilon)$ *при четных* m ω*-предельна к циклу* $\Gamma(\varepsilon)$ $(\Gamma_2(\varepsilon))$, *если* $\varepsilon\in B_6$ $(\varepsilon\in \mathrm{E}_5)$, *и выходит из* $V(L^0)$, *если* $\varepsilon\notin B_1\cup B_4\cup B_5\cup B_6\cup E_5$.

– Сепаратриса $L_{m,\omega}(\varepsilon)$ *при нечетных (четных)* m *не выходит из* $V(L^0)$ *и* α*-предельна к* $\Gamma_1(\varepsilon)$, *если* $\varepsilon\in E_2\cup B_3\cup E_3$ $(\varepsilon\in E_3\cup B_4\cup E_4)$, *и выходит из* $V(L^0)$, *если* $\varepsilon\in E_1\cup E_4\cup B_5\cup E_5\cup B_6\cup E_6\cup B_7\cup E_7$ $(\varepsilon\in B_1\cup E_1\cup B_2\cup E_2\cup E_5\cup B_6\cup E_6\cup E_7)$;

– Сепаратрисы седел $z_m(\varepsilon)$, $m=1,2,...,2n$, *отличные от* $L_{m,\alpha}(\varepsilon)$ *и* $L_{m,\omega}(\varepsilon)$, *выходят из* $V(L^0)$ *при всех* $\varepsilon\in(-\delta,\delta)^2$.

Доказательство. Обозначим $D^+ := D\setminus\{(0,0)\}$, $\tilde D := (0,1)\times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. Пусть (ρ,φ) – полярные координаты в D, (ρ_k,φ_k) полярные координаты точки z_k^0, D_k^+ – область в D^+ с полярными координатами $0<\rho<1$, $\varphi_k-\pi/n<\varphi<\varphi_k+\pi/n$, $k=1,2,...,2n$. Пусть $p: D^+\to\tilde D$ – отображение, ставящее в соответствие точке $z=(z_1,z_2)$ с полярными координатами (ρ,φ) точку $(\rho, n\varphi \bmod 2\pi)$. Так как $\forall z\in D^+$ $p(R_1 z)=p(z)$, то в $\tilde D$ определены векторные поля $\tilde X_\varepsilon$, заданные равенством $\tilde X_\varepsilon(\tilde z):=X_\varepsilon(z)$ для $\tilde z=p(z)$. Так как ограничение p на область D_k^+ является C^∞-диффеоморфизмом на образ, то $\tilde X_\varepsilon$ имеет седла $\tilde z_m(\varepsilon)=p(z_k(\varepsilon))$, $m=1,2$, $k=m(\bmod 2)$, с седловыми индексами $\lambda_m(\varepsilon)$ и входящими (выходящими) сепаратрисами $\tilde L_{m,\omega}(\varepsilon)=p(L_{k,\omega}(\varepsilon))$ $(\tilde L_{m,\alpha}(\varepsilon)=p(L_{k,\alpha}(\varepsilon)))$. Мы можем считать, что дуги $\tau_i(-1,1)$, $i=1,2$, содержатся в области D_1^+. Тогда сепаратрисы $\tilde L_{1,\alpha}(\varepsilon)$ и $\tilde L_{2,\omega}(\varepsilon)$ $(\tilde L_{2,\alpha}(\varepsilon)$ и $\tilde L_{1,\omega}(\varepsilon))$ пересекают дугу $p(\tau_1(-1,1))$ $(p(\tau_2(-1,1)))$ в точке $p(\tau_1(u_{1,\alpha}(\varepsilon)))$ $(p(\tau_2(u_{2,\alpha}(\varepsilon))))$. Поле $\tilde X_0$ имеет устойчивый контур $\tilde L^0$ из седел $\tilde z_1(0),\tilde z_2(0)$ и соединяющих их сепаратрис $\tilde L_{1,\alpha}(0)=\tilde L_{2,\omega}(0)$ и $\tilde L_{2,\alpha}(0)=\tilde L_{1,\omega}(0)$. Согласно [8] (а также [9, с. 109]) для семейства $\tilde X_\varepsilon$ существуют цилиндрическая окрестность $V(\tilde L^0)$ контура $\tilde L^0$, число $\delta\in(0,\delta_0)$ такие, что для семейства векторных полей $\tilde X_\varepsilon$, $\varepsilon\in(-\delta,\delta)^2$, в $V(\tilde L^0)$ справедливы все утверждения теоремы 1 в случае $n=1$.

При $\varepsilon\in B_6$ поле $\tilde X_\varepsilon$ имеет в $V(\tilde L^0)$ единственную замкнутую траекторию – двойной цикл $\tilde\Gamma(\varepsilon)$. Множество $p^{-1}(\tilde\Gamma(\varepsilon))$ состоит из замкнутых траекторий поля X_ε. Поэтому в $V(L^0):=p^{-1}(V(\tilde L^0))$ есть хотя бы одна замкнутая траектория поля X_ε. Предположим, что в $V(L^0)$ содержится две траектории – $\Gamma'(\varepsilon)$ и $\Gamma''(\varepsilon)$. Они обе пересекают трансверсаль $\tau_1(-1,1)$ соответственно в точках a' и a''. Множества $p(\Gamma'(\varepsilon))$ и $p(\Gamma''(\varepsilon))$ являются замкнутыми траекториями и потому совпадают с $\tilde\Gamma(\varepsilon)$. Так как $\tau_1(-1,1)\subset D_1^+$, то $p(a')$ и $p(a'')$ – разные точки пересечения замкнутой траектории $\tilde\Gamma(\varepsilon)$ с трансверсалью $p\circ\tau_1(-1,1)$, что невозможно. Поэтому сделанное предположение неверно, то есть в $V(L^0)$ имеется единственная замкнутая траектория поля X_ε – $\Gamma(\varepsilon)=p^{-1}(\tilde\Gamma(\varepsilon))$. Пусть $\tilde\Gamma(\varepsilon)$ пересекает дугу $p(\tau_1(-1,1))$ в точке $p(\tau_1(u_0))$. Для u, достаточно близких к u_0, определено отображение последования $p(\tau_1(u))\mapsto p(\tau_1(\tilde f(u)))$ по траекториям поля $\tilde X_\varepsilon$, где $\tilde f(u_0)=u_0$, $\tilde f'(u_0)=1$, $\tilde f''(u_0)\neq 0$. Тогда

$R_{k-1}(\tau_1(u)) \mapsto R_k(\tau_1(\tilde{f}(u)))$, $k \in \mathbf{N}$, – отображение соответствия по траекториям поля X_ε между дугами $R_k(\tau_1(-1,1))$ и $R_{k+1}(\tau_1(-1,1))$, а $\tau_1(u) \mapsto \tau_1(f(u))$, где $f = \underbrace{\tilde{f} \circ \tilde{f} \circ \cdots \circ \tilde{f}}_{n}$, – отображение последования по траекториям поля X_ε. Поскольку $f(u_0) = u_0$, $f'(u_0) = (\tilde{f}'(u_0))^n = 1$, $f''(u_0) = n\tilde{f}''(u_0)\tilde{f}'(u_0) = n\tilde{f}''(u_0) \neq 0$, то $\Gamma(\varepsilon)$ – двойной цикл.

Аналогично получаем, что поле X_ε имеет в $V(L^0)$ при $\varepsilon \in E_2 \cup B_3 \cup E_3 \cup B_4 \cup E_4 \cup B_5$ единственную замкнутую траекторию – грубый неустойчивый цикл, а при $\varepsilon \in \mathrm{E}_5$ две замкнутые траектории – грубый неустойчивый цикл и грубый устойчивый цикл.

Совпадение сепаратрис $L_{m,\alpha}(\varepsilon)$ и $L_{m+1,\omega}(\varepsilon)$ при нечетных (четных) m для $\varepsilon \in B_3 \cup B_7$ ($\varepsilon \in B_1 \cup B_4$) следует из равенства $u_1(\varepsilon) = \varepsilon_1$ ($u_2(\varepsilon) = \varepsilon_2$). Если $\varepsilon \in B_2$ ($\varepsilon \in B_5$), то сепаратрисы $\tilde{L}_{1,\alpha}(\varepsilon)$ и $\tilde{L}_{1,\omega}(\varepsilon)$ ($\tilde{L}_{2,\alpha}(\varepsilon)$ и $\tilde{L}_{2,\omega}(\varepsilon)$) совпадают, что равносильно равенству $\tilde{f}(\varepsilon_1) = \varepsilon_2$. Но это равенство означает и совпадение при нечетных (четных) m сепаратрис $L_{m,\alpha}(\varepsilon)$ и $L_{m+2,\omega}(\varepsilon)$. Поведение сепаратрис $L_{k,\alpha}(\varepsilon)$ и $L_{k,\omega}(\varepsilon)$ при остальных ε – следствие соответствующего поведения сепаратрис $\tilde{L}_{i,\alpha}(\varepsilon)$ и $\tilde{L}_{i,\omega}(\varepsilon)$.

Теорема 2. *Пусть* $\lambda_1^0 < 1$, $\lambda_2^0 > 1$, $\lambda_1^0\lambda_2^0 < 1$, *и имеет место случай* (Б). *Тогда существует окрестность* $V(L^0) = R_1(V(L^0))$ *контура* L^0, *число* $\delta > 0$ *и представление области параметров* $(-\delta,\delta)^2$ *в виде объединения множеств* B_i, $i = 0,1,...,7$, E_j, $j = 1,2,...,5$, *где* (*рис.* 4)

$B_0 = \{(0,0)\}$, $B_l = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = b_l(\varepsilon_1)\}$, $b_l : (0,\delta) \to (0,\delta)$, $b_l \in C^{r-1}$, $b_l(+0) = b_l'(+0) = 0$, $l = 2,3,4$, $B_1^1 = (0,\delta) \times \{0\}$, $B_5^1 = \{0\} \times (0,\delta)$, $B_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_i^k$, $B_i^k = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = b_i^k(\varepsilon_1)\}$, $b_i^k : (0,\delta) \to (0,\delta)$, $b_i^k \in C^{r-1}$, $b_i^k(+0) = (b_i^k)'(+0) = 0$, $i = 1,5$, $k = 2,3,...$, $b_1^k(\varepsilon_1) \uparrow b_2(\varepsilon_1)$, $b_5^k(\varepsilon_1) \downarrow b_4(\varepsilon_1)$, $B_6 = (-\delta,0) \times \{0\}$, $B_7 = \{0\} \times (-\delta,0)$, $E_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_1^k$, $E_5 = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_5^k$,

со следующими свойствами:

– *Особыми точками поля* X_ε *в* $V(L^0)$ *являются седла* $z_k(\varepsilon)$, $k = 1,...,2n$, *и только они*;

– *При* $\varepsilon \in B_2 \cup E_3 \cup B_3$ *поле* X_ε *имеет в* $V(L^0)$ *единственную замкнутую траекторию* $\Gamma_1(\varepsilon)$, *являющуюся двойным циклом, если* $\varepsilon \in B_2$, *и неустойчивым циклом, если* $\varepsilon \in E_3 \cup B_3$. *При* $\varepsilon \in \mathrm{E}_2$ *поле* X_ε *имеет в* $V(L^0)$ *две замкнутые траектории, неустойчивый цикл* $\Gamma_1(\varepsilon)$ *и устойчивый цикл* $\Gamma_2(\varepsilon)$. *При всех остальных* $\varepsilon \in (-\delta,\delta)^2$ *замкнутых траекторий в* $V(L^0)$ *нет*;

– *Если* $\varepsilon \in B_7$ ($\varepsilon \in B_6$), *то при нечетных* (*четных*) m *сепаратрисы* $L_{m,\alpha}(\varepsilon)$ *и* $L_{m+1,\omega}(\varepsilon)$ *не выходят из* $V(L^0)$ *и совпадают. Если* $\varepsilon \in B_5^s$ ($\varepsilon \in B_1^s$), *то при нечетных* (*четных*) m *сепаратрисы* $L_{m,\alpha}(\varepsilon)$ *и* $L_{m+2s-1,\omega}(\varepsilon)$ *не выходят из* $V(L^0)$ *и совпадают*;

– *Сепаратрисы* $L_{m,\alpha}(\varepsilon)$ *и* $L_{m+2,\omega}(\varepsilon)$ *при нечетных* (*четных*) m *не выходят из* $V(L^0)$ *и совпадают, образуя вместе с седлами неустойчивый* (*устойчивый*) *контур* $\Gamma_1(\varepsilon)$ ($\Gamma_2(\varepsilon)$), *если* $\varepsilon \in B_4$ ($\varepsilon \in B_3$);

– *Сепаратриса* $L_{m,\alpha}(\varepsilon)$ *при нечетных* m *выходит из* $V(L^0)$, *если* $\varepsilon \notin B_0 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_7$;

– *Сепаратриса* $L_{m,\alpha}(\varepsilon)$ *при четных* m ω-*предельна к* $\Gamma_1(\varepsilon)$ ($\Gamma_2(\varepsilon)$), *если* $\varepsilon \in B_2$ ($\varepsilon \in \mathrm{E}_2$), *и выходит из* $V(L^0)$, *если* $\varepsilon \notin B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup E_2 \cup B_3 \cup B_6$;

– *Сепаратриса* $L_{m,\omega}(\varepsilon)$ *при нечетных* (*четных*) m *не выходит из* $V(L^0)$ *и* α-

предельна к $\Gamma_1(\varepsilon)$, *если* $\varepsilon \in B_2 \cup E_2 \cup B_3 \cup E_3$ $(\varepsilon \in E_3 \cup B_4)$ *и выходит из* $V(L^0)$, *если* $\varepsilon \notin B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup E_2 \cup B_3 \cup E_3 \cup B_4 \cup B_6$ $(\varepsilon \notin B_0 \cup B_3 \cup E_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_7)$;

– Сепаратрисы седел $z_m(\varepsilon)$, $m = 1,2,...,2n$, *отличные от* $L_{m,\alpha}(\varepsilon)$ *и* $L_{m,\omega}(\varepsilon)$, *выходят из* $V(L^0)$ *при всех* $\varepsilon \in (-\delta,\delta)^2$.

Доказательство. При $n = 1$ утверждение теоремы доказано в [10]. Случай $n > 1$ сводится к случаю $n = 1$ аналогично доказательству теоремы 1.

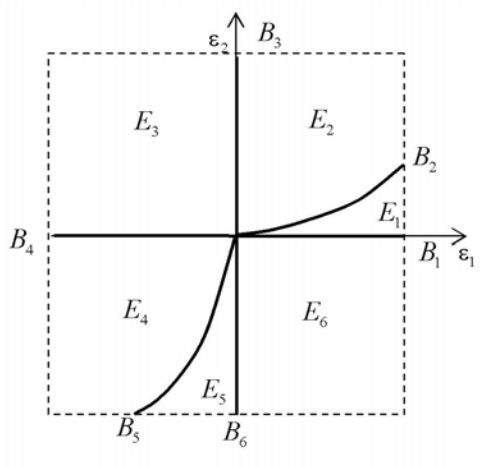

Рис. 5. Бифуркационная диаграмма
в случае (А), $\lambda_1^0 > 1$, $\lambda_2^0 > 1$

Fig. 5. Bifurcation diagram
in the case (A), $\lambda_1^0 > 1$, $\lambda_2^0 > 1$

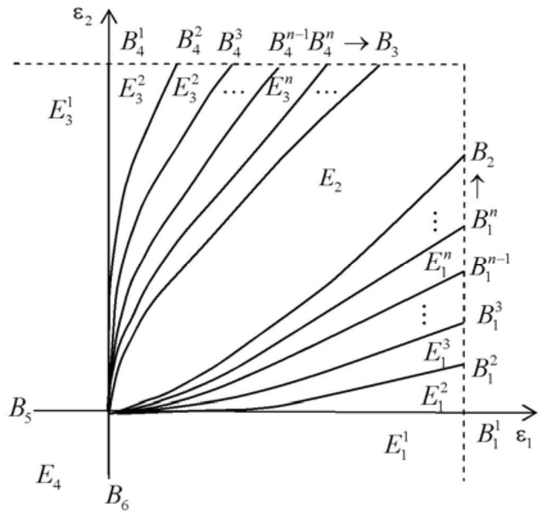

Рис. 6. Бифуркационная диаграмма
в случае (Б), $\lambda_1^0 > 1$, $\lambda_2^0 > 1$

Fig. 6. Bifurcation diagram
in the case (B), $\lambda_1^0 > 1$, $\lambda_2^0 > 1$

Теорема 3. *Пусть* $\lambda_1^0 > 1$, $\lambda_2^0 > 1$, *и имеет место случай* (А). *Тогда существует окрестность* $V(L^0) = R_1(V(L^0))$ *контура* L^0, *число* $\delta > 0$ *и представление области параметров* $(-\delta,\delta)^2$ *в виде объединения множеств* $B_0 = \{(0,0)\}$, B_i, E_i, $i = 1,2,...,5$, *где* (*рис.* 5)

$$B_2 = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = b_2(\varepsilon_1)\},\ b_2 : (0,\delta) \to (0,\delta),\ b_2 \in C^{r-1},\ b_2(+0) = b_2'(+0) = 0,$$

$$B_5 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 = b_5(\varepsilon_2)\},\ b_5 : (-\delta,0) \to (-\delta,0),\ b_5 \in C^{r-1},\ b_5(-0) = b_5'(-0) = 0,$$

$$B_1 = (0,\delta) \times \{0\},\ B_3 = \{0\} \times (0,\delta),\ B_4 = (-\delta,0) \times \{0\},\ B_6 = \{0\} \times (-\delta,0),$$

со следующими свойствами:

– Особыми точками поля X_ε *в* $V(L^0)$ *являются седла* $z_k(\varepsilon)$, $k = 1,...,2n$, *и только они*;

– Поле X_ε *имеет в* $V(L^0)$ *единственный* (*устойчивый*) *предельный цикл*, *если* $\varepsilon \in E_5 \cup B_6 \cup E_6 \cup B_1 \cup E_1$, *и не имеет замкнутых траекторий при остальных* $\varepsilon \in (-\delta,\delta)^2$;

– Сепаратрисы $L_{m,\alpha}(\varepsilon)$ *и* $L_{m+1,\omega}(\varepsilon)$ *при нечетных* (*четных*) m *не выходят из* $V(L^0)$ *и совпадают*, *если* $\varepsilon \in B_2 \cup B_5$ $(\varepsilon \in B_3 \cup B_6)$. *Сепаратрисы* $L_{m,\alpha}(\varepsilon)$ *и* $L_{m+2,\omega}(\varepsilon)$ *при нечетных* (*четных*) m *не выходят из* $V(L^0)$ *и совпадают*, *образуя вместе с седлами устойчивый контур*, *если* $\varepsilon \in B_1$ $(\varepsilon \in B_4)$;

– Сепаратрисы $L_{m,\alpha}(\varepsilon)$ *при нечетных* (*четных*) m *не выходят из* $V(L^0)$ *и* ω-*предельны к циклу*, *если* $\varepsilon \in E_5 \cup B_6 \cup E_6$ $(\varepsilon \in E_4 \cup B_5 \cup E_5)$, *и выходят из* $V(L^0)$, *если* $\varepsilon \in E_1 \cup E_2 \cup B_3 \cup E_3 \cup B_4 \cup E_4$ $(\varepsilon \in B_1 \cup E_1 \cup B_2 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_6)$;

– Сепаратрисы $L_{m,\omega}(\varepsilon)$ *выходят из* $V(L^0)$ *при всех* $\varepsilon \notin \bigcup_{i=1}^{6} B_i$;

– Сепаратрисы седел $z_m(\varepsilon)$, $m = 1,2,...,2n$, *отличные от* $L_{m,\alpha}(\varepsilon)$ *и* $L_{m,\omega}(\varepsilon)$,

выходят из $V(L^0)$ *при всех* $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$.

Теорема 4. *Пусть* $\lambda_1^0 > 1$, $\lambda_2^0 > 1$, *и имеет место случай* (Б). *Тогда существует окрестность* $V(L^0) = R_1(V(L^0))$ *контура* L^0, *число* $\delta > 0$ *и представление области параметров* $(-\delta, \delta)^2$ *в виде объединения множеств* $B_0 = \{(0,0)\}$, B_i, $i = 1,2,...,5$, E_j, $j = 1,2,3,4$, *где* (*рис.* 6)

$$B_0 = \{(0,0)\},\ B_2 = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = b_2(\varepsilon_1)\},\ B_3 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 = b_3(\varepsilon_2)\},\ b_l : (0,\delta) \to (0,\delta),\ b_l \in C^{r-1},$$

$$b_l(+0) = b_l'(+0) = 0,\ l = 2,3,\ B_1^1 = (0,\delta) \times \{0\},\ B_4^1 = \{0\} \times (0,\delta),\ B_1 = \bigcup_{s=1}^{\infty} B_1^s,$$

$$B_4 = \bigcup_{s=1}^{\infty} B_4^s,\ B_1^k = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = b_1^k(\varepsilon_1)\},\ B_4^k = \{\varepsilon : \varepsilon_1 = b_1^k(\varepsilon_2)\},\ b_i^k : (0,\delta) \to (0,\delta),\ b_i^k \in C^{r-1},$$

$$b_i^k(+0) = (b_i^k)'(+0) = 0,\ i = 1,4,\ k = 2,3,...,\ b_1^k(\varepsilon_1) \uparrow b_2(\varepsilon_1),\ b_5^k(\varepsilon_1) \downarrow b_4(\varepsilon_1),$$

$$B_5 = (-\delta,0) \times \{0\},\ B_6 = \{0\} \times (-\delta,0),\ E_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_1^k,\ E_3 = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_3^k,$$

со следующими свойствами:

– *Особыми точками поля* X_ε *в* $V(L^0)$ *являются седла* $z_k(\varepsilon)$, $k = 1,...,2n$, *и только они*;

– *При* $\varepsilon \in E_2$ *поле* X_ε *имеет в* $V(L^0)$ *единственную замкнутую траекторию* $\Gamma(\varepsilon)$ – *устойчивый цикл. При всех остальных* $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$ *замкнутых траекторий в* $V(L^0)$ *нет*;

– *Сепаратрисы* $L_{m,\alpha}(\varepsilon)$ *и* $L_{m+1,\omega}(\varepsilon)$ *при нечетных* (*четных*) m *не выходят из* $V(L^0)$ *и совпадают, если* $\varepsilon \in B_4 \cup B_6$ ($\varepsilon \in B_1 \cup B_5$). *Сепаратрисы* $L_{m,\alpha}(\varepsilon)$ *и* $L_{m+2,\omega}(\varepsilon)$ *при нечетных* (*четных*) m *не выходят из* $V(L^0)$ *и совпадают, образуя вместе с седлами* $z_k(\varepsilon)$ *с нечетными* (*четными*) *номерами* k *устойчивый контур* $\Gamma_1(\varepsilon)$ ($\Gamma_2(\varepsilon)$), *если* $\varepsilon \in B_2$ ($\varepsilon \in B_3$);

– *Сепаратрисы* $L_{m,\alpha}(\varepsilon)$ *при нечетных* (*четных*) m ω*-предельны к циклу* $\Gamma(\varepsilon)$, *если* $\varepsilon \in E_2$, *к контуру* $\Gamma_2(\varepsilon)$ ($\Gamma_1(\varepsilon)$), *если* $\varepsilon \in B_3$ ($\varepsilon \in B_2$), *и выходит из* $V(L^0)$, *если* $\varepsilon \in B_1 \cup B_5 \cup E_1 \cup E_3 \cup E_4$ ($\varepsilon \in B_1 \cup B_5 \cup E_1 \cup E_3 \cup E_4$);

– *Сепаратрисы* $L_{m,\omega}(\varepsilon)$ *при нечетных* (*четных*) m *выходят из* $V(L^0)$, *если* $\varepsilon \in B_3 \cup B_4 \cup B_6 \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$ ($\varepsilon \in B_1 \cup B_2 \cup B_5 \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$);

– *Сепаратрисы седел* $z_m(\varepsilon)$, $m = 1,2,...,2n$, *отличные от* $L_{m,\alpha}(\varepsilon)$ *и* $L_{m,\omega}(\varepsilon)$, *выходят из* $V(L^0)$ *при всех* $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$.

Доказательство теорем 3 и 4 аналогично доказательству теорем 1 и 2.

Замечание. Случай $\lambda_1^0 < 1,\ \lambda_2^0 > 1$, $\lambda_1^0 \lambda_2^0 > 1$ и случай $\lambda_1^0 < 1, \lambda_2^0 < 1$ сводятся к случаям, рассмотренным в теоремах 1–4, переходом к семейству противоположных векторных полей $\{-X_\varepsilon\}$ и перенумерацией особых точек.

Примечания

1. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: Наука, 1978. 304 с.
2. Жолондек Х. О версальности одного семейства симметричных векторных полей на плоскости // Математический сборник. 1983. Т. 120, № 4. С. 473–499.
3. Golubitsky M., Shaeffer D., Stewart I. Singularities and Groups in Bifurcation Theory. Springer-Verlag, 1988. 556 p.
4. Шноль Э.Э. Правильные многогранники и бифуркации симметричных положений равновесия обыкновенных дифференциальных уравнений // Математический сборник. 2000. Т. 191, № 8. С. 141–157.
5. Ройтенберг В.Ш. Векторные поля на плоскости с центральной симметрией: грубость

и первая степень негрубости // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер.: Естественно-математические и технические науки. 2021. Вып. 2 (281). С. 27–40. URL: http://vestnik.adygnet.ru

6. Ройтенберг В.Ш. Бифуркации полицикла, образованного двумя петлями сепаратрис негрубого седла динамической системы с центральной симметрией // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер.: Математика. Механика. Физика. 2021. Т. 13, № 2. С. 39–46. DOI: 10.14529/mmph210305

7. Ройтенберг В.Ш. О некоторых нелокальных бифуркациях динамических систем с симметрией // Математика и естественные науки. Теория и практика: межвуз. сб. науч. тр. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2023. Вып. 18. С. 25–34.

8. Ноздрачева В.П. Бифуркации особого цикла с двумя сепаратрисами // Интегральные и дифференциальные уравнения и приближенные решения: сб. научн. тр. Калмыцкого ун-та. Элиста, 1985. С. 107–124.

9. Динамические системы – 5. Теория бифуркаций / В.И. Арнольд, В.С. Афраймович, Ю.С. Ильяшенко, Л.П. Шильников // Итоги науки и техники. Сер.: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Москва: ВИНИТИ, 1986. Т. 5. С. 5–217.

10. Ройтенберг В.Ш. О двухпараметрических бифуркациях сепаратрисных контуров. Ярославль: Яросл. политехн. ин-т, 1989. 27 с. Деп. в ВИНИТИ, № 5213-В89.

References

1. Arnold V.I. Additional chapters of the theory of ordinary differential equations. Moscow: Nauka, 1978. 304 p.

2. Zholondek Kh. On versality of one family of symmetric vector fields on the plane // Mathematical Collection. 1983. Vol. 120, No. 4. P. 473–499.

3. Golubitsky M., Shaeffer D., Stewart I. Singularities and Groups in Bifurcation Theory. Springer-Verlag, 1988. 556 p.

4. Shnol E.E. Regular polyhedra and bifurcations of symmetric equilibria of ordinary differential equations // Mathematical Collection. 2000. Vol. 191, No. 8. P. 1243–1258.

5. Roytenberg V.Sh. Planar vector fields with central symmetry: roughness and first degree of non-roughness // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser.: Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2021. Iss. 2 (281). P. 27–40. URL: http://vestnik.adygnet.ru

6. Roytenberg V.Sh. Bifurcations of polycycle formed by two separatrix loops of a non-rough saddle of a dynamical system with central symmetry // Bulletin of the South Ural State University. Ser.: Mathematics. Mechanics. Physics. 2021. Vol. 13, No. 3. P. 39–46. DOI: 10.14529/mmph210305

7. Roytenberg V.Sh. On some nonlocal bifurcations of dynamical systems with symmetry // Mathematics and Natural Sciences. Theory and Practice: coll. of scientific works. Yaroslavl: YaSTU Publishing House, 2023. Iss. 18. P. 25–34.

8. Nozdracheva V.P. Bifurcations of singular cycle with two separatrices // The Integrated and Differential Equations and the Approached Decisions: coll. of proceedings of Kalmyk University. Elista, 1985. P. 107–124.

9. Dynamical Systems – 5. Bifurcation Theory / V.I. Arnold, V.S. Afraymovich, Yu.S. Ilyashenko, L.P. Shilnikov // Results of Science and Technology. Ser.: Modern Problems of Mathematics. Fundamental Directions. Moscow: VINITI, 1986. Vol. 5. P. 5–217.

10. Roytenberg V.Sh. On two-parameter bifurcations of separatrix contours. Yaroslavl: Yaroslavl Polytechnic Institute, 1989. 27 p. Dep. in VINITI, No. 5213-B89.

Статья поступила в редакцию 20.04.2023; *одобрена после рецензирования 15.05.2023*; *принята к публикации 16.05.2023*.

The article was submitted 20.04.2023; *approved after reviewing 15.05.2023*; *accepted for publication 16.05.2023*.