Научная статья
УДК 517.9
ББК 22.161.6
У 95
DOI: 10.53598/2410-3225-2023-2-321-19-26

Об автоколебаниях одной кинетической модели

(*Рецензирована*)

Адам Дамирович Ушхо

Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия, uschho76@mail.ru

Аннотация. *Методами качественной теории дифференциальных уравнений рассмотрено поведение кинетической модели, в частности, фазовый портрет на диске Пуанкаре. Приведен пример системы с устойчивым циклом.*

Ключевые слова: *кинетическое уравнение, модель Селькова, модель Чумакова-Слинько, сфера (диск) Пуанкаре, кубическая автономная динамическая система на плоскости, состояние равновесия, фокус, узел, седло*

Original Research Paper

On self-oscillations of one kinetic model

Adam D. Ushkho

Adyghe State University, Maikop, Russia, uschho76@mail.ru

Abstract. *With the use of methods of qualitative theory of differential equations, the article examines the kinetic model behavior, in particular, the phase portrait on the Poincaré disk. An example of a system with a stable cycle is given.*

Keywords: *kinetic equation, Selkov model, Slinko-Chumakov's model, Poincare sphere (disk), cubic autonomous dynamical system on a plane, equilibrium, focus, node, saddle*

Введение

В 1968 году была рассмотрена математическая модель, основанная на бимолекулярной реакции [1]. Соответствующая система нелинейных дифференциальных уравнений относительно концентраций получила название кинетические уравнения [2]. При этом нелинейность представлена многочленами третьей степени в правых частях.

В это же время советским (российским) ученым Е.Е. Сельковым была предложена нелинейная модель, описывающая фосфофруктокиназную фазу гликолитической реакции [3], получившая название по фамилии автора, модель Селькова. Аналогичные модели, расширяющие спектр действия модели и поэтому названные «модели Слинько, Чумакова-Слинько», получили свое развитие в работах [4–6]. Например, в работе [7] дано качественное исследование системы Чумакова-Слинько, адекватно описывающей химические процессы в реакции окисления молекулярного водорода на поверхностях металлических катализаторов[*]. Модель Селькова получила также свое расширение на стохастический случай [8].

Несмотря на достаточную временную историю, в данной нелинейной модели ос-

[*] *Отметим одну из недавних работ в Journal of Differential Equations. 2019. Vol. 266, Iss. 11. P. 7638–7657, где представлено доказательство гипотезы Артеса–Льибре–Вальса о единственности предельных циклов для системы Хиггинса–Селкова и системы Селкова. При этом используется теорема о несуществовании предельных циклов системы Лиенара.*

тались некоторые вопросы, требующие своего разрешения, особенно в математическом плане. В частности, не рассмотрено поведение решений системы в так называемом круге Пуанкаре. Данная работа и посвящена этому вопросу.

Основные результаты

Рассмотрим систему[**]

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a - bx + fy + cx^2 y, \\ \dfrac{dy}{dt} = d + (b+k)x - fy - cx^2 y, \ ck \neq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Единственным состоянием равновесия системы (1) в ограниченной части фазовой плоскости является точка $A\left(-\dfrac{a+d}{k}, \dfrac{-ak^2 - bk(a+d)}{fk^2 + c(a+d)^2}\right)$. Пусть $a + d = -k$, тогда имеем точку $A\left(1, \dfrac{b-a}{f+c}\right)$. После переноса начала координат в точку A (сохраняя обозначения фазовых переменных x и y) получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{bc - bf - 2ac}{f+c}x + (f+c)y + \dfrac{bc - ac}{f+c}x^2 + 2cxy + cx^2 y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2ac - bc + fb + fk + ck}{f+c}x - (f+c)y + \dfrac{ac - bc}{f+c}x^2 - 2cxy - cx^2 y. \end{cases} \tag{2}$$

Определитель матрицы линейного приближения системы (2) равен

$$\Delta(0,0) = -k(f+c)\,. \tag{3}$$

Дивергенция векторного поля системы (2) в точке $O(0,0)$ равна

$$\sigma(0,0) = \frac{-f^2 - (2c+b)f + bc - 2ac - c^2}{f+c}\,. \tag{4}$$

Рассмотрим случай, когда величины (3) и (4) положительны. Для определенности положим выполненными неравенства $f + c > 0, k < 0$. Неравенство $\sigma(0,0) > 0$ при выполнении условия $f + c > 0$ равносильно неравенству

$$f^2 + (2c+b)f + c^2 + 2ac - bc < 0\,. \tag{5}$$

Пусть $f < 0$, тогда в силу неравенства $f + c > 0$ выполняется условие $c > 0$. Потребуем, чтобы точка A была расположена в первом квадранте. Тогда по необходимости будет выполнено неравенство $b - a > 0$. Таким образом, неравенство (5) выполняется при условии

$$f_1 < f < f_2\,, \tag{6}$$

где $f_{1,2} = \dfrac{-2c - b \mp \sqrt{b^2 + 8c(b-a)}}{2}$.

Условие $f + c > 0$ достаточно для выполнения неравенства

$$f > \frac{-2c - b - \sqrt{b^2 + 8c(b-a)}}{2}\,. \tag{7}$$

Действительно, неравенство (7) равносильно неравенству

[**] *Заметим, что система с меньшим числом параметров рассмотрена в работе Ушхо А.Д., Дегтярев Д.Ю. Об автоколебаниях в кинетической модели гликолиза Селькова // Труды ФОРА. 2022. № 27. С. 29–34.*

$f + c > \dfrac{-b - \sqrt{b^2 + 8c(b-a)}}{2}$, правая часть которого является отрицательным числом.

Тем самым доказана

Теорема 1. *Если* $f < 0, c + f > 0, b - a > 0, k = -(a+d) < 0,$ *то единственное состояние равновесия* $A\left(1, \dfrac{b-a}{f+c}\right)$ *системы* (1), *расположенное в ограниченной части фазовой плоскости*, *является простым неустойчивым топологическим узлом*.

Замечание 1. По терминологии [9] простым топологическим узлом называется простое состояние равновесия типа «узел» или «фокус».

Далее исследуем поведение траекторий системы (1) в бесконечно удаленных частях фазовой плоскости.

Преобразование Пуанкаре [9, 10] $x = \dfrac{1}{z}, y = \dfrac{u}{z}$ переводит систему (1) в систему:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -cu - cu^2 + (b+k)z^2 + (b-f)uz^2 + dz^3 - fu^2z^2 - auz^3, \\ \dfrac{dz}{dt} = -cuz + bz^3 - fuz^3 - az^4. \end{cases} \tag{8}$$

Состояниями равновесия системы (8) при $z = 0$ являются точки: $W_1(u = z = 0)$ – сложное состояние равновесия с отличной от нуля дивергенцией, $W_2(u = -1, z = 0)$ – простое состояние равновесия. Для определения типа состояния равновесия $W_1(u = z = 0)$ вначале перепишем систему (8), вводя новый масштаб времени по формуле $d\tau = -cdt$:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} = u + u^2 - \dfrac{(b+k)}{c}z^2 - \dfrac{(b-f)}{c}uz^2 - \dfrac{d}{c}z^3 + \dfrac{f}{c}u^2z^2 + \dfrac{a}{c}uz^3, \\ \dfrac{dz}{d\tau} = uz - \dfrac{bz^3}{c} + \dfrac{f}{c}uz^3 + \dfrac{a}{c}z^4. \end{cases} \tag{9}$$

С помощью преобразования $\overline{u} = z, \ \overline{z} = u$ приведем систему (9) к виду:

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{u}}{d\tau} = \overline{u}\overline{z} - \dfrac{b}{c}\overline{u}^3 + \dfrac{f}{c}\overline{u}^3\overline{z} + \dfrac{a}{c}\overline{u}^4 \equiv P_2(\overline{u}, \overline{z}), \\ \dfrac{d\overline{z}}{d\tau} = \overline{z} + \overline{z}^2 - \dfrac{(b+k)}{c}\overline{u}^2 + \dfrac{(f-b)}{c}\overline{u}^2\overline{z} - \dfrac{d}{c}\overline{u}^3 + \dfrac{f}{c}\overline{u}^2\overline{z}^2 + \dfrac{a}{c}\overline{u}^3\overline{z} \equiv \overline{z} + Q_2(\overline{u}, \overline{z}). \end{cases} \tag{10}$$

Решение уравнения $\overline{z} + Q_2(\overline{u}, \overline{z}) = 0$ можно представить в виде ряда $\varphi(\overline{u}) = \dfrac{(b+k)}{c}\overline{u}^2 + \ldots$, а P_2 также в виде

$$P_2(\overline{u}, \varphi(\overline{u})) = \frac{k}{c}\overline{u}^3 + \ldots \tag{11}$$

Из (11) согласно теореме 65 [10] следует, что точка $W_1(u = z = 0)$ – топологическое седло, если $kc < 0$, и топологический узел, если $kc > 0$.

Замечание 2. Топологический узел W_1 будем называть сложным топологическим узлом в отличие от простого топологического узла (см. замечание 1).

Чтобы установить тип состояния равновесия $W_2(u = -1, z = 0)$, совершим в системе (8) параллельный перенос $\begin{cases} u = \tilde{u} - 1, \\ z = \tilde{z}, \end{cases}$ и результат запишем в переменных u и z:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = cu + F_2(u,z), \\ \dfrac{dz}{dt} = cz + G_2(u,z), \end{cases} \tag{12}$$

где $F_2(u,z), G_2(u,z)$ – многочлены второй степени, не содержащие свободных и линейных членов.

Из (12) следует, что $W_2(u=-1, z=0)$ – простой устойчивый (неустойчивый) узел, если $c<0$ $(c>0)$.

Теорема 2. *Для системы вида* (8), *если* $c>0, k>0$ $(c<0, k<0)$, *то точка* $W_1(u=z=0)$ *– сложный топологический узел, а* $W_2(u=-1, z=0)$ *– простой неустойчивый (устойчивый) узел, если* $c<0, k>0$ $(c>0, k<0)$, *то точка* $W_1(u=z=0)$ *– топологическое седло, а* $W_2(u=-1, z=0)$ *– простой устойчивый (неустойчивый) узел.*

Второе преобразование Пуанкаре [9, 10] $x=\dfrac{v}{z}, y=\dfrac{1}{z}$ приводит систему (1) к системе:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = cv^2 + fz^2 + cv^3 + (f-b)vz^2 + az^3 - (b+k)v^2z^2 - dvz^3 \equiv \tilde{P}(v,z), \\ \dfrac{dz}{dt} = cv^2z + fz^3 - (b+k)vz^3 - dz^4 \equiv \tilde{Q}(v,z). \end{cases} \tag{13}$$

Состояние равновесия $W_3(v=z=0)$ системы (13) сложное, причем правые части этой системы не содержат линейных членов. Направления, в которых траектории системы (13) стремятся к точке $W_3(v=z=0)$, удовлетворяют уравнению [11]:

$$z(cv^2 + fz^2) = 0. \tag{14}$$

Очевидно, уравнение (14) не имеет вещественных корней, отличных от $z=0$, если $cf>0$. Это означает, что любая траектория системы, входящая в точку W_3, касается в этой точке прямой $z=0$. Если $cf<0$, то критическими направлениями системы (13) в точке W_3 являются направления $z=0, z=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{f}}\,v$.

Следуя работе [11], изучим поведение траекторий системы (13) в окрестности точки W_3 при выполнении условий:

$$\begin{cases} a>0, b-a>0, \\ f<0, c+f>0, \\ d>0, k=-(a+d), \\ b+k>0, \\ \dfrac{a}{b} < \sqrt{-\dfrac{f}{c}}, \\ \dfrac{d}{b+k} < \sqrt{-\dfrac{f}{c}}. \end{cases} \tag{15}$$

Покажем, что в направлении $z=0$ в точку W_3 входят только две траектории. Составим функцию

$$\psi(u,v) = \frac{\tilde{Q}(v,uv)}{\tilde{P}(v,uv)} - u = \frac{-cu - fu^3 + bu^3v - au^4v}{c + fu^2 + cv + (f-b)u^2v + au^3v - (b+k)u^2v^2 - du^3v^2}. \tag{16}$$

Из (16) следует неравенство

$$\psi_u'(0,0) = -1 < 0. \qquad (17)$$

В силу работы [11] с учетом неравенства (17) делаем вывод, что в точку W_3 входит в точности одна положительная полутраектория и выходит из нее в точности одна отрицательная полутраектория. Указанные полутраектории совпадают с прямой $z = 0$ для $v \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$, ε – сколь угодно малое положительное число.

Из условий (15) с учетом теорем 1 и 2 следует, что точки: $A\left(1, \dfrac{b-a}{f+c}\right)$ – простой неустойчивый топологический узел, W_1 – топологическое седло, W_2 – простой неустойчивый узел. Следовательно, индекс Пуанкаре состояния равновесия W_3 равен нулю [12].

Воспользуемся формулой Бендиксона [10] $I = 1 + \dfrac{e-h}{2}$, где $e(h)$ – число эллиптических (гиперболических) секторов, примыкающих к состоянию равновесия. При $I = 0$ имеем равенство

$$h = e + 2. \qquad (18)$$

Во избежание громоздких аналитических вычислений, связанных с методом Фроммера [11], воспользуемся геометрическим способом доказательства отсутствия эллиптических секторов в окрестности точки W_3.

Изобразим расположение главных изоклин системы (1) в круге Пуанкаре (рис. 1).

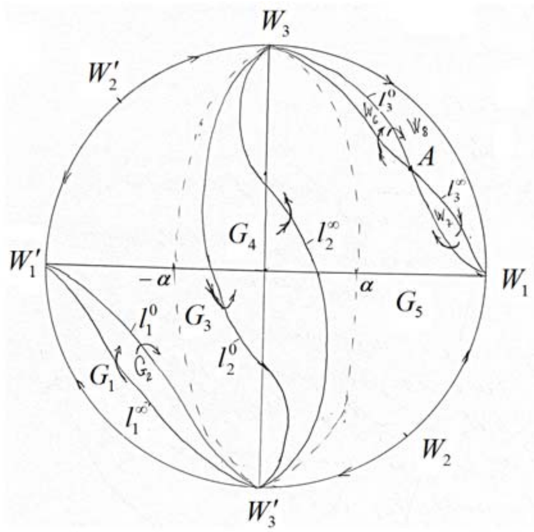

Рис. 1. Расположение главных изоклин системы (1) в круге Пуанкаре $\left(\alpha = \sqrt{-\dfrac{f}{c}}\right)$

Fig. 1. Main isoclines of the system (1) in the Poincare disk model $\left(\alpha = \sqrt{-\dfrac{f}{c}}\right)$

Введем следующие обозначения односвязных областей, на которые разбит круг Пуанкаре главными изоклинами.

G_1 – область, ограниченная дугой $W_1' W_3'$ окружности круга Пуанкаре и кривой l_1^∞;

G_2 – область, ограниченная кривыми l_1^∞ *и* l_1^0;

G_3 – область, ограниченная дугой $W_1' W_3$ окружности круга Пуанкаре и кривыми l_1^0, l_2^0;

G_4 – область, ограниченная кривыми l_2^∞ *и* l_2^0;

G_5 – область, ограниченная дугой $W_1 W_3'$ окружности круга Пуанкаре, кривой l_2^{∞}, дугами AW_3 *и* AW_1 кривых l_3^{∞} *и* l_3^0 соответственно;

G_6 – область, ограниченная дугой AW_3 кривой l_3^{∞} и дугой AW_3 кривой l_3^0;

G_7 – область, ограниченная дугой AW_1 кривой l_3^{∞} и дугой AW_1 кривой l_3^0;

G_8 – область, ограниченная дугой W_1W_3, дугой AW_3 кривой l_3^0 и дугой AW_1 кривой l_3^{∞}.

Символом l_i^0 $(l_i^{\infty}), i=\overline{1,3}$ обозначена ветвь изоклины нуля (бесконечности) системы (1).

Для дальнейшего анализа укажем знаки производных $\frac{dx}{dt}$ *и* $\frac{dy}{dt}$ в областях G_i $(i=\overline{1,8})$.

$$G_1 : \frac{dx}{dt}<0, \frac{dy}{dt}>0; \quad G_2 : \frac{dx}{dt}>0, \frac{dy}{dt}>0; \quad G_3 : \frac{dx}{dt}>0, \frac{dy}{dt}<0; \quad G_4 : \frac{dx}{dt}>0, \frac{dy}{dt}>0;$$
$$G_5 : \frac{dx}{dt}<0, \frac{dy}{dt}>0; \quad G_6 : \frac{dx}{dt}>0, \frac{dy}{dt}>0; \quad G_7 : \frac{dx}{dt}<0, \frac{dy}{dt}<0; \quad G_8 : \frac{dx}{dt}>0, \frac{dy}{dt}<0.$$

Из рисунка 1 видно, что гиперболический сектор может примыкать к состоянию равновесия W_3 в двух случаях: а) располагаясь в первом квадранте и пересекая дугу AW_3 изоклины бесконечности l_3^{∞} и дугу AW_3 изоклины нуля l_3^0; б) располагаясь в четвертом квадранте справа от изоклины бесконечности l_2^{∞}.

Впрочем, случай б) объясняется тем, что траектория, исходящая из точки W_2, не может пересечь изоклину бесконечности l_2^{∞}.

Так как число гиперболических секторов, примыкающих к состоянию равновесия W_3, равно двум, то согласно (18) эллиптических секторов нет в окрестности W_3.

Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Если коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют условиям* (15), *то эта система имеет на экваторе сферы Пуанкаре три состояния равновесия*: $W_1(u=z=0)$ – *топологическое седло*, $W_2(u=-1, z=0)$ – *простой неустойчивый узел*, $W_3(v=z=0)$ – *сложное состояние равновесия*, *к которому примыкают два гиперболических сектора при отсутствии эллиптических секторов*, *а в ограниченной части фазовой плоскости – единственное состояние равновесия* $A\left(1, \frac{b-a}{f+c}\right)$ – *простой неустойчивый топологический узел*, *окруженный хотя бы одним устойчивым предельным циклом*.

Фазовый портрет системы изображен на рисунке 2.

Пример 1. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 - 3x - \frac{1}{2}y + 2x^2 y, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}x + \frac{1}{2}y - 2x^2 y \end{cases}$$

удовлетворяет условиям теоремы 3 и имеет неустойчивый топологический узел $A\left(1, \frac{4}{3}\right)$, окруженный хотя бы одним устойчивым предельным циклом.

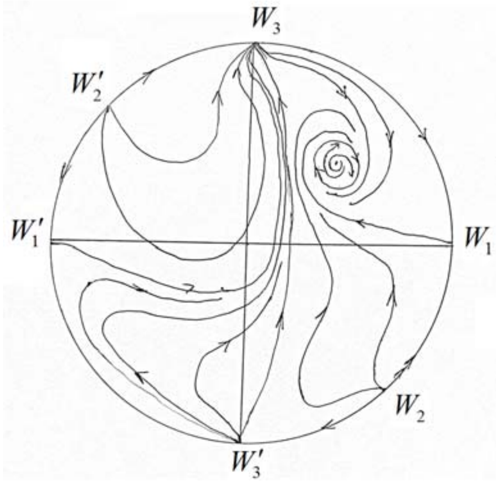

Рис. 2. Фазовый портрет системы (1) в условиях теоремы 3

Fig. 2. The phase portrait of the system (1) in the case of theorem 3

Примечания

1. Lefever R. Stabilité des structures dissipatives // Bulletin de la Classe des Sciences. 1968. Vol. 54. P. 712–719. DOI: https://doi.org/10.3406/barb.1968.62173

2. Strogatz S.H. Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering. Second Edition. Boca Raton London; New York: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2015. 513 p.

3. Selkov E.E. Self-oscillations in glycolysis. 1. A simple kinetic model // Eur. J. Biochem. 1968. Vol. 4. P. 79–86.

4. Кинетическая модель автоколебательной гетерогенной реакции / Г.А. Чумаков, М.М. Слинько, В.Д. Беляев, М.Г. Слинько // Доклады Академии наук СССР. 1977. Т. 234, № 2. С. 399–402; Чумаков Г.А., Слинько М.Г., Беляев В.Д. Сложные изменения скорости гетерогенной каталитической реакции // Доклады АН СССР. 1980. Т. 253, № 3. С. 654–658.

5. Лашина Е.А., Чумаков Г.А., Чумакова Н.А. Максимальные семейства периодических решений кинетической модели гетерогенной каталитической реакции // Вестник НГУ. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2005. Т. 5, вып. 4. С. 42–59.

6. Чумаков Г.А. Динамика нелинейной системы дифференциальных уравнений // Сибирский математический журнал. 2007. Т. 48, № 5. С. 1180–1195.

7. Потапов В.И. О бифуркациях в динамической системе Чумакова-Слинько // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 2 (1). С. 146–155.

8. Bashkirtseva I., Ryashko L. Stochastic sensitivity and variability of glycolytic oscillations in the randomly forced Sel’kov model // The European Physical Journal. B. 2017. Vol. 90. P. 17. URL: https://doi.org/10.1140/epjb/e2016-70674-4

9. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. Москва: Наука, 1976. 496 с.

10. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. Москва: Наука, 1966. 568 с.

11. Фроммер М. Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер // Успехи математических наук. 1941. Вып. 9. С. 212–253.

12. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1947. 392 с.

References

1. Lefever R. Stabilité des structures dissipatives // Bulletin de la Classe des Sciences. 1968. Vol. 54. P. 712–719. DOI: https://doi.org/10.3406/barb.1968.62173

2. Strogatz S.H. Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering. Second Edition. Boca Raton London; New York: CRC Press, Taylor &

Francis Group, 2015. 513 p.

3. Selkov E.E. Self-oscillations in glycolysis. 1. A simple kinetic model // Eur. J. Biochem. 1968. Vol. 4. P. 79–86.

4. Kinetic model of an auto-oscillating heterogeneous reaction / G.A. Chumakov, M.M. Slinko, V.D. Belyaev, M.G. Slinko // Reports of the Academy of Sciences of the USSR. 1977. Vol. 234, No. 2. P. 399–402; Chumakov G.A., Slinko M.G., Belyaev V.D. Complex changes in the rate of a heterogeneous catalytic reaction // Reports of the Academy of Sciences of the USSR. 1980. Vol. 253, No. 3. P. 654–658.

5. Lashina E.A., Chumakov G.A., Chumakova N.A. Maximal families of periodic solutions in a kinetic model of a heterogeneous catalytic reaction // Bulletin of NGU. Ser.: Mathematics. Mechanics. Computer Science. 2005. Vol. 5, Iss. 4. P. 42–59.

6. Chumakov G.A. Dynamics of a nonlinear system of differential equations // Siberian Mathematical Journal. 2007. Vol. 48, No. 5. P. 1180–1195.

7. Potapov V.I. On bifurcations in the Chumakov-Slinko dynamic system // Bulletin of Nizhny Novgorod University named after N.I. Lobachevsky. 2011. No. 2 (1). P. 146–155.

8. Bashkirtseva I., Ryashko L. Stochastic sensitivity and variability of glycolytic oscillations in the randomly forced Sel'kov model // The European Physical Journal. B. 2017. Vol. 90. P. 17. URL: https://doi.org/10.1140/epjb/e2016-70674-4

9. Bautin N.N., Leontovich E.A. Methods and techniques of the qualitative study of dynamical systems on the plane. Moscow: Nauka, 1976. 496 p.

10. Qualitative theory of second-order dynamical systems / A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon, A.G. Maier. Moscow: Nauka, 1973. 568 p.

11. Frommer M. Integral curves of a first-order ordinary differential equation in a neighborhood of a singular point that has a rational character // Successes of Mathematical Sciences. 1941. Iss. 9. P. 212–253.

12. Poincare A. On curves defined by differential equations. Moscow; Leningrad: Gostekhizdat, 1947. 392 p.

Статья поступила в редакцию 11.04.2023; *одобрена после рецензирования 10.05.2023*; *принята к публикации 11.05.2023*.

The article was submitted 11.04.2023; *approved after reviewing 10.05.2023*; *accepted for publication 11.05.2023*.