МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья
УДК 517.925
ББК 22.161.6
Р 65
DOI: 10.53598/2410-3225-2023-3-326-11-20

О рождении замкнутых траекторий из двух петель сепаратрис сшитого седло-узла, проходящих через развилку

(*Рецензирована*)

Владимир Шлеймович Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет, Ярославль, Россия, vroitenberg@mail.ru

Аннотация. *Рассматривается двухпараметрическое семейство кусочно-гладких разрывных векторных полей на плоскости. При нулевых значениях параметров предполагается, что векторное поле имеет особую точку на линии разрыва типа сшитый седло-узел, выходящая сепаратриса которой разветвляется и идет в сшитый седло-узел, образуя две петли. В случае общего положения получено разбиение окрестности нуля на плоскости параметров по числу и типу замкнутых траекторий, рождающихся из указанных петель.*
Ключевые слова: *кусочно-гладкое векторное поле на плоскости, сшитый седло-узел, петля сепаратрисы, бифуркация, замкнутая траектория*

Original Research Paper

On the the generation of closed trajectories from two separatrix loops of a sewn saddle-node passing through a fork

Vladimir Sh. Roytenberg

Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russia, vroitenberg@mail.ru

Abstract. *We consider a two-parameter family of piecewise-smooth discontinuous vector fields in the plane. At zero values of the parameters, it is assumed that the vector field has a singular point on the discontinuity line of the sewn saddle-node type, the outgoing separatrix of which branches out and goes to the sewn saddle-node, forming two loops. In general position, we obtain a partition of the neighborhood of zero on the parameter plane by the number and type of closed trajectories born from these loops.*
Keywords: *planar piecewise-smooth vector field, sewn saddle-node, separatrix loop, bifurcation, closed trajectory*

Введение. Пусть M – компактное двумерное C^∞-подмногообразие плоскости $\mathbf{R}^2$, D – разбиение M на компактные двумерные C^∞-подмногообразия M_i, $i \in \{1,...,n\}$, такое, что $M = M_1 \cup ... \cup M_n$, $M_i \cap M_j = \partial M_i \cap \partial M_j$ при $i, j \in \{1,..,n\}$, $i \neq j$. Обозначим S множество всех точек $x \in M_i \cap M_j$ при некоторых $i, j \in \{1,..,n\}$, $i \neq j$. Пусть $\mathrm{X}^r(M_i)$ – банахово пространство векторных полей класса C^r $(r \geq 1)$ на M_i с C^r-нормой. *Кусочно-гладким векторным полем* на M, задаваемым векторными полями $X^{(i)} \in \mathrm{X}^r(M_i)$, $i \in \{1,...,n\}$, назовем класс всех векторных полей $\tilde{X}: M \to \mathbf{R}^2$ таких, что $\tilde{X}(x) = X^{(i)}(x)$ в точках $x \in M_i \setminus S$, $i \in \{1,...,n\}$. Отождествим его с элементом $X = (X^{(1)},...,X^{(n)})$ банахова пространства $\mathrm{X}^r(M,D) := \mathrm{X}^r(M_1) \oplus ... \oplus \mathrm{X}^r(M_n)$. Под траекториями поля $X \in \mathrm{X}^r(M,D)$, следуя [1, с. 95], будем понимать траектории дифференциального включения $\dot{x} \in \hat{X}(x)$, $x \in M$, где $\hat{X}(x) = \{X^{(i)}(x)\}$, если $x \in M_i \setminus S$ и $\hat{X}(x) = \{sX^{(i)}(x) + (1-s)X^{(i)}(x), s \in [0,1]\}$, если $x \in \partial M_i \cap \partial M_j \neq \varnothing$.

Исследованию бифуркаций кусочно-гладких векторных полей на плоскости посвящено большое число работ. С практической точки зрения наибольший интерес представляет изучение бифуркаций, при которых рождаются устойчивые замкнутые траектории. В [1] приведено описание бифуркации особых точек первой степени негрубости. Различные локальные бифуркации в типичных семействах кусочно-гладких векторных полей на плоскости с числом параметров ≤ 2 исследовались в работах [2–6].

Бифуркации сепаратрисных контуров в типичных однопараметрических семействах были описаны в [3, 7]. Ряд нелокальных бифуркаций в типичных двухпараметрических семействах был рассмотрен в [8–12].

В настоящей работе мы исследуем бифуркации кусочно-гладкого векторного поля, имеющего полицикл, состоящий из двух петель, образованных выходящей сепаратрисой особой точки на линии переключения поля типа сшитый седло-узел, проходящей через грубую особую точку на линии переключения, в которой она разветвляется на две полутраектории, ω-предельные к сшитому седло-узлу. Рассматриваемые векторные поля образуют подмногообразие коразмерности два в $\mathrm{X}^r(M,D)$. Поэтому их бифуркации естественно изучать в двухпараметрических семействах «общего положения».

1. Особые точки «сшитый седло-узел» и «развилка». Рассмотрим векторное поле $X_0 = (X_0^{(1)},...,X_0^{(n)}) \in \mathrm{X}^r(M,D)$. Предположим, что точка O_1^0 принадлежит $S_1 := M_{j^-} \cap M_{j^+}$ при некоторых $j^-, j^+ \in \{1,...,n\}$, $j^- \neq j^+$; $X_0^{(j^+)}(O_1^0) = 0$; линейный оператор $dX_0^{(j^+)}(O_1^0)$ имеет собственные значения $\lambda_1^0 < \lambda_2^0 < 0$, а его собственные подпространства трансверсальны касательной к S_1 в точке O_1^0; вектор $X_0^{(j^-)}(O_1^0)$ направлен внутрь M_{j^-}. Такая точка называется сжимающим *сшитым седло-узлом.* Траектории поля X_0 в окрестности точки O_1^0 изображены на рисунке 1.

Пусть точка O_2^0 принадлежит $S_2 := M_{k^-} \cap M_{k^+}$ при некоторых $k^-, k^+ \in \{1,...,n\}$, $k^- \neq k^+$. Выберем C^∞-координаты z_1, z_2 в окрестности V_2 точки O_2^0, в которых эта точка имеет нулевые координаты, $M_{k^-} \cap V_2$ (соотв. $M_{k^+} \cap V_2$) задается неравенством $z_1 \leq 0$ (соотв. $z_2 \geq 0$), $X_0^{(k^\pm)}(z) = P_1^\pm(z_1,z_2)\partial/\partial z_1 + P_2^\pm(z_1,z_2)\partial/\partial z_2$. Если $P_1^+(0,0)\partial P_2^+(0,0)/\partial z_1 > 0$, $P_2^-(0,0) \neq 0$, то O_2^0 – грубая особая точка типа 2a в терминологии из [1]. Нам будет удобно называть ее сходящейся (расходящейся) *развилкой* при $P_2^-(0,0) > 0$ ($P_2^-(0,0) < 0$). Траектории поля X_0 в окрестности расходящейся развилки O_2^0 изображены на рисунке 1.

2. Условия и результаты. Рассмотрим семейство полей $X_\varepsilon = (X_\varepsilon^{(1)},...,X_\varepsilon^{(n)}) \in \mathrm{X}^r(M,D)$ $(r \geq 2)$, зависящих от параметра ε, меняющегося в некоторой окрестности E^0 точки $0 \in \mathbf{R}^2$. Будем считать, что векторы $X_\varepsilon^{(j)}(z)$ C^r-гладко зависят от $(z,\varepsilon)\in M_j\times \mathrm{E}^0$, $j\in\{1,...,n\}$. Продолжим векторные поля $X_\varepsilon^{(j)}$, $j\in\{1,...,n\}$, до векторных полей $\bar{X}_\varepsilon^{(j)}$ на некоторой окрестности M_j в $\mathbf{R}^2$ так, чтобы отображения $(z,\varepsilon)\mapsto \bar{X}_\varepsilon^{(j)}(z)$ принадлежали классу C^r.

Предположим, что для поля X_0 выполняются следующие условия (рис. 1).

(У$_1$) *Поле X_0 имеет особые точки: сжимающий сшитый седло-узел $O_1^0\in S_1:=M_{j^-}\cap M_{j^+}$ и расходящуюся развилку $O_2^0\in S_2:=M_{k^-}\cap M_{k^+}$. Из точки O_2^0 выходит единственная отрицательная полутраектория L^- поля X_0, при этом она кончается в точке O_1^0 и не содержит особых точек, отличных от O_1^0 и O_2^0. Из точки O_2^0 выходит положительная полутраектория L_1^+ (соотв. L_2^+), начинающаяся как полутраектории поля $X_0^{(k^-)}$ (соотв. $X_0^{(k^+)}$), не содержащая отличных от O_2^0 особых точек и точек линейных особенностей и ω-предельная к O_1^0 по направлению, соответствующему собственному значению λ_2^0 оператора $dX_0^{(j^+)}(O_1^0)$.*

При выполнении условий (У$_1$) $\Gamma_i^0:=L^-\cup L_i^+$ ($i=1,2$) – простые замкнутые кривые.

В окрестности V_1 точки O_1^0 выберем C^∞-координаты (y_1,y_2) так, чтобы точка O_1^0 имела нулевые координаты, $M_{j^-}\cap V_1$ ($M_{j^+}\cap V_1$) задавалось неравенством $y_1\le 0$ ($y_2\ge 0$),

$$\bar{X}_\varepsilon^{(j^\pm)}(y_1,y_2)=P_{11}^\pm(y_1,y_2,\varepsilon)\partial/\partial y_1+P_{12}^\pm(y_1,y_2,\varepsilon)\partial/\partial y_2 .$$

Тогда $P_{11}^+(0,0,0)=P_{12}^+(0,0,0)=0$, $P_{12}^-(0,0,0)<0$. Так как $\det(\partial P_{1i}^+(0,0,0)/\partial y_j)=\lambda_1^0\lambda_2^0\ne 0$, то по теореме о неявной функции найдутся такие окрестность нуля $\mathrm{E}^1\subset \mathrm{E}^0$ и число $\sigma_1>0$, что $\forall\varepsilon\in \mathrm{E}^1$ система уравнений $P_{11}^+(y_1,y_2,\varepsilon)=0$, $P_{12}^+(y_1,y_2,\varepsilon)=0$ имеет относительно $(y_1,y_2)\in(-\sigma_1,\sigma_1)^2$ единственное решение $y_1=Y_1(\varepsilon)$, $y_2=Y_2(\varepsilon)$, при этом $Y_i(\cdot)\in C^r$, $Y_i(0)=0$, $i=1,2$.

Без ограничения общности можно считать, что координаты z_1, z_2 в окрестности V_2 точки O_2^0 выбраны так, что $X_\varepsilon^{(k^\pm)}(z_1,z_2)=P_{21}^\pm(z_1,z_2,\varepsilon)\partial/\partial z_1+P_{22}^\pm(z_1,z_2,\varepsilon)\partial/\partial z_2$, где

$$P_{21}^+(0,0,0)>0,\ P_{22}^+(0,0,0)=0,\ \ \partial P_{22}^+(0,0,0)/\partial z_1>0,\ P_{22}^-(0,0,0)<0 .$$

По теореме о неявной функции найдутся такие число $\sigma_2>0$ и окрестность нуля $\mathrm{E}^2\subset \mathrm{E}^1$, что $\forall\varepsilon\in \mathrm{E}^2$ уравнение $P_{22}^+(z_1,0,\varepsilon)=0$ имеет относительно $z_1\in(-\sigma_2,\sigma_2)$ единственное решение $z_1=Z_1(\varepsilon)$, при этом

$$Z_1(\cdot)\in C^r,\ Z_1(0)=0,\ P_{21}^+(Z_1(\varepsilon),0,\varepsilon)>0,\ \ \partial P_{22}^+(Z_1(\varepsilon),0,\varepsilon)/\partial z_1>0,\ P_{22}^-(Z_1(\varepsilon),0,\varepsilon)<0 . \quad (1)$$

Так как отрицательная полутраектория L^- поля X_0, выходящая из точки $O_2^0\in S_2$ с координатой $z_1=Z_1(0)$, трансверсально пересекает линию S_1 в точке O_1^0 с координатой $y_1=0$ и не имеет особенностей кроме этих точек, то, учитывая (1), получаем, что E^2 можно выбрать так, что при $\varepsilon\in \mathrm{E}^2$ отрицательная полутраектория L_ε^- поля X_ε, выходящая из точки $O_2(\varepsilon)\in S_2$ с координатой $z_1=Z_1(\varepsilon)$, трансверсально пересекает линию S_1 в точке с координатой $y_1=\tilde{Y}(\varepsilon)$, где $\tilde{Y}(\cdot)\in C^r$, $\tilde{Y}(0)=0$.

Условие

(У$_2$) *Производные* $Y_2'(0)$ *и* $\tilde{Y}'(0)$ *линейно независимы*

не зависит от произвола в выборе координат (y_1, y_2), (z_1, z_2) и векторных полей $\overline{X}_{\varepsilon}^{(j^+)}$.

При условии (У$_2$) в некоторой окрестности нуля $\mathrm{E}^* \subset \mathrm{E}^2$ можно выбрать координаты $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ так, что $Y_2(\varepsilon) = -\varepsilon_1$, $\tilde{Y}(\varepsilon) = \varepsilon_2$. Отождествим точку $\varepsilon \in \mathrm{E}^*$ с ее координатной строкой $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Пусть $\mathrm{E}^* = (-\delta^*, \delta^*)^2$.

Теорема. *Если семейство векторных полей* $X_\varepsilon \in \mathrm{X}^r(M, D)$, $\varepsilon \in \mathrm{E}^0$, *удовлетворяет условиям* (У$_1$) *и* (У$_2$), *то существуют такие число* $\delta > 0$ *и разбиение области параметров* $(0,\delta) \times (-\delta, \delta)$ *на множества* $B_i = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = \beta_i(\varepsilon_1)\}$, $i = 1,2,3$, $E_1 = \{\varepsilon : -\delta < \varepsilon_2 < \beta_1(\varepsilon_1)\}$, $E_2 = \{\varepsilon : \beta_1(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \beta_2(\varepsilon_1)\}$, $E_3 = \{\varepsilon : \beta_2(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \beta_3(\varepsilon_1)\}$, $E_4 = \{\varepsilon : \beta_3(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \delta\}$, *где* $\beta_i : (0,\delta) \to (-\delta, \delta)$, $\beta_i \in C^r$, $\beta_i(+0) = 0$, $\forall \varepsilon_1 \in (0,\delta)$ $\beta_1(\varepsilon_1) < \beta_2(\varepsilon_1) < \beta_3(\varepsilon_1)$, *что у векторного поля* X_ε, $\varepsilon \in (0,\delta) \times (-\delta, \delta)$, *имеются следующие замкнутые траектории, рождающиеся из петель* Γ_1^0 *и* Γ_2^0: *при* $\varepsilon \in B_1$ *двойной цикл* $\Gamma_1(\varepsilon)$, $\operatorname*{lt}_{\varepsilon \to 0} \Gamma_1(\varepsilon) = \Gamma_1^0$, *при* $\varepsilon \in E_2 \cup B_2 \cup E_3 \cup B_3 \cup E_4$ *устойчивая гиперболическая замкнутая траектория* $\Gamma_1^s(\varepsilon)$, $\operatorname*{lt}_{\varepsilon \to 0} \Gamma_1^s(\varepsilon) = \Gamma_1^0$; *при* $\varepsilon \in E_2$ ($\varepsilon \in B_2$) *неустойчивая гиперболическая замкнутая траектория* (*неустойчивая замкнутая траектория, проходящая через* $O_2(\varepsilon)$) $\Gamma_1^u(\varepsilon)$, $\operatorname*{lt}_{\varepsilon \to 0} \Gamma_1^u(\varepsilon) = \Gamma_1^0$; *при* $\varepsilon \in E_1 \cup B_1 \cup E_2 \cup B_2 \cup E_3$ ($\varepsilon \in B_3$) *– устойчивая гиперболическая замкнутая траектория* (*замкнутая траектория, проходящая через* $O_2(\varepsilon)$, *устойчивая справа и неустойчивая слева*) $\Gamma_2(\varepsilon)$, $\operatorname*{lt}_{\varepsilon \to 0} \Gamma_2(\varepsilon) = \Gamma_2^0$. *При* $\varepsilon \in (-\delta, 0] \times (-\delta, \delta)$ *замкнутых траекторий, рождающихся из* Γ_1^0 *и* Γ_2^0, *нет.*

Если существует последовательность Γ_m, $m \in \mathbf{N}$, *замкнутых траекторий векторных полей* X_{ε^m}, *не содержащих дуг линии* S_2, *для которой* $\varepsilon^m \to 0$, $\operatorname*{lt}_{m \to \infty} \Gamma_m = \Gamma_1^0$ *или* $\operatorname*{lt}_{m \to \infty} \Gamma_m = \Gamma_2^0$, *то найдется такой номер* m_0, *что при* $m \ge m_0$ Γ_m *совпадает с одной из перечисленных выше траекторий.*

Доказательство теоремы приведено в п. 3–5.

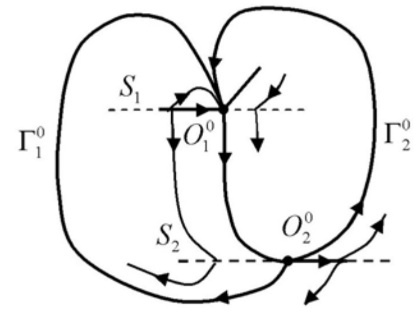

Рис. 1. Траектории векторного поля X_0
Fig. 1. The trajectories of the vector field X_0

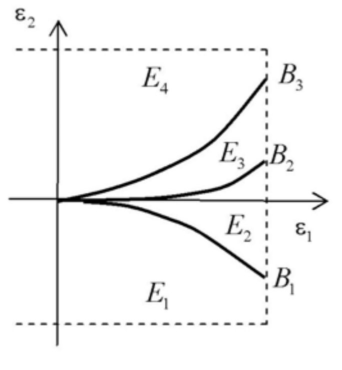

Рис. 2. Бифуркационная диаграмма
Fig. 2. The bifurcation diagram

3. Функции соответствия по траекториям. Мы можем считать окрестность E^* столь малой, что для любого $\varepsilon \in \mathrm{E}^*$ матрица $(\partial P_{1i}^+(Y_1(\varepsilon), Y_2(\varepsilon), \varepsilon) / \partial y_j)$ имеет собственные значения $\lambda_1(\varepsilon) < \lambda_2(\varepsilon) < 0$, причем $\lambda_i(\cdot) \in C^{r-1}$, $\lambda_i(0) = \lambda_i^0$, $i = 1,2$, и собственный вектор $(q(\varepsilon),1)$, $q(\cdot)\in C^{r-1}$, соответствующий собственному значению $\lambda_2(\varepsilon)$. В окрестности V_1 перейдем к координатам $x=y_1-Y_1(\varepsilon)+q(\varepsilon)(y_2-Y_2(\varepsilon))$, $y=y_2-Y_2(\varepsilon)=y_2+\varepsilon_1$. В этих координатах S_1 задается уравнением $y=\varepsilon_1$, а $\bar{X}_\varepsilon^{(j^+)}(z)=P(x,y,\varepsilon)\partial/\partial x+Q(x,y,\varepsilon)\partial/\partial y$, где

$$P(x,y,\varepsilon)=\lambda_1(\varepsilon)x+r_1(x,y,\varepsilon),\quad Q(x,y,\varepsilon)=a(\varepsilon)x+\lambda_2(\varepsilon)y+r_2(x,y,\varepsilon)),$$

$$r_i(0,0,\varepsilon)=\partial r_i(0,0,\varepsilon)/\partial x=\partial r_i(0,0,\varepsilon)/\partial y=0,\quad i=1,2. \qquad (2)$$

Выберем число $0<k<1$, удовлетворяющее неравенству

$$k\left|a(0)\right|<\min\{|\lambda_2^0|/2,\ (\lambda_2^0-\lambda_1^0)/2\}. \qquad (3)$$

Вследствие (2) и (3) существуют такие числа $d>0$ и $\delta_1\in(0,\delta^*]$, что функция $R(x,y,\varepsilon):=P(x,y,\varepsilon)/Q(x,y,\varepsilon)$ определена для всех $0<y\le d$, $\left|x\right|\le ky$, $\varepsilon\in(-\delta_1,\delta_1)^2$ и $R(ky,y,\varepsilon)>k$, $R(-ky,y,\varepsilon)<-k$ для всех $y\in(0,d]$. Поэтому решение $x=\chi(y,u,\varepsilon)$ уравнения $dx/dy=R(x,y,\varepsilon)$, удовлетворяющее начальному условию $\chi(d,u,\varepsilon)=u$ при $\left|u\right|\le kd$, определено для всех $y\in(0,d]$ и имеет место неравенство

$$|\chi(y,u,\varepsilon)|\le ky. \qquad (4)$$

Обозначим T_ε^1 и T_ε^2 дуги, задаваемые, соответственно, условиями $y=d$, $|x|\le kd$ и $y=\varepsilon_1$, $|x|\le kd$. Пусть δ_2 – наименьшее из чисел d и δ_1. При $\varepsilon\in(0,\delta_2)\times(-\delta_2,\delta_2)$ функция $\varphi(\cdot,\varepsilon):=\chi(\varepsilon_1,\cdot,\varepsilon)$ является функцией соответствия по траекториям векторного поля $X_\varepsilon^{(j^+)}$ между дугами T_ε^1 и T_ε^2.

Лемма. *Существует такие числа* $\alpha>1$, $C>0$ *и* $\delta_3\in(0,\delta_2]$, *что для всех* $u\in[-kd,kd]$, $\varepsilon\in(0,\delta_3)\times(-\delta_3,\delta_3)$

$$|\varphi(u,\varepsilon)|\le k\varepsilon_1,\quad 0<\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,\varepsilon)\le C\varepsilon_1^\alpha,\quad \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}(u,\varepsilon)\right|\le C\varepsilon_1^\alpha,\quad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_2}(u,\varepsilon)\right|\le C\varepsilon_1. \qquad (5)$$

Доказательство. Первое из неравенств (5) – следствие (4). Производная $\dfrac{\partial\chi}{\partial u}(y,u,\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\frac{d}{dy}\frac{\partial\chi}{\partial u}(y,u,\varepsilon)=\frac{\partial R}{\partial x}(\chi(y,u,\varepsilon),y,\varepsilon)\frac{\partial\chi}{\partial u}(y,u,\varepsilon),$$

и начальному условию $\partial\chi(d,u,\varepsilon)/\partial u=1$. Поэтому

$$\frac{\partial\chi}{\partial u}(y,u,\varepsilon)=\exp\int_d^y\frac{\partial R}{\partial x}(\chi(y,u,\varepsilon),y,\varepsilon)\,dy=\exp\left(-\int_y^d\frac{\partial R}{\partial x}(\chi(y,u,\varepsilon),y,\varepsilon)\,dy\right). \qquad (6)$$

Пусть $1<\alpha<2\lambda_1^0/(\lambda_1^0+\lambda_2^0)$. Считая d и $\delta_3\in(0,\delta_2]$ достаточно малыми, из (2) и (3) имеем

$$\partial R(x,y,\varepsilon)/\partial x\ge\alpha/y\quad \text{при}\quad 0<y\le d,\ \left|x\right|\le ky,\quad \varepsilon\in(-\delta_3,\delta_3)^2. \qquad (7)$$

Из (4), (6) и (7) теперь получаем неравенство

$$0<\partial\chi(y,u,\varepsilon)/\partial u\le\left(y/d\right)^\alpha\quad \text{при}\ |u|\le kd,\ y\in(0,d],\ \varepsilon\in(0,\delta_3)\times(-\delta_3,\delta_3) \qquad (8)$$

и, в частности, второе из неравенств (5) с $C\ge 1/d^\alpha$.

Из (6) следует, что

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}(u,\varepsilon)=\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,\varepsilon)\int_d^{\varepsilon_1}\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}(\chi(y,u,\varepsilon),y,\varepsilon)\frac{\partial\chi}{\partial u}(y,u,\varepsilon)\,dy\,. \tag{9}$$

Из (2) и (3) получаем, что существует такая постоянная $N>0$, что

$$\left|\partial^2 R(x,y,\varepsilon)/\partial x^2\right|\le N/y^2 \quad \text{при} \quad 0<y\le d,\ |x|\le ky,\ \varepsilon\in(-\delta_3,\delta_3)^2\,. \tag{10}$$

Теперь из (8–10) следует третье неравенство в (5) с $C\ge N/(d^{\alpha+1}(\alpha-1))$.

Производная $\partial\chi(y,u,\varepsilon)/\partial\varepsilon_2$ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\frac{d}{dy}\frac{\partial\chi}{\partial\varepsilon_i}(y,u,\varepsilon)=\frac{\partial R}{\partial x}(x,y,\varepsilon)\frac{\partial\chi}{\partial\varepsilon_2}(y,u,\varepsilon)+\frac{\partial R}{\partial\varepsilon_2}(x,y,\varepsilon)\,, \quad \text{где} \quad x=\chi(y,u,\varepsilon)\,,$$

и начальному условию $\partial\chi(d,u,\varepsilon)/\partial\varepsilon_2=0$. Поэтому

$$\left.\frac{\partial\chi}{\partial\varepsilon_2}(y,u,\varepsilon)\right|_{y=\varepsilon_1}=\int_d^{\varepsilon_1}\frac{\partial R}{\partial\varepsilon_2}(\chi(y,u,\varepsilon),y,\varepsilon)\exp\int_y^{\varepsilon_1}\frac{\partial R}{\partial x}(\chi(s,u,\varepsilon),s,\varepsilon)\,ds\,dy\,. \tag{11}$$

Из (2) и (3) следует существование такой постоянной $D>0$, что

$$\left|\partial R(x,y,\varepsilon)/\partial\varepsilon_2\right|\le D \quad \text{при} \quad 0<y\le d,\ |x|\le ky,\ \varepsilon\in(-\delta_3,\delta_3)^2\,. \tag{12}$$

Теперь из (7), (11) и (12) получаем и четвертое неравенство в (5) с $C\ge D/(\alpha-1)$.

Пусть T_ε^3 – дуга S_2, задаваемая условиями $z_2=0$, $Z_1(\varepsilon)-\bar v\le z_1\le Z_1(\varepsilon)$. Согласно [8] из определения $Z_1(\varepsilon)$ и формул (1) следует, что если числа $\bar v>0$ и $\delta_4\in(0,\delta_3]$ достаточно малы, то отрицательная полутраектория поля X_ε, $\varepsilon\in(-\delta_4,\delta_4)^2$, выходящая из точки дуги T_ε^3 с координатой $z_1=Z_1(\varepsilon)+v$, $v\in(-\bar v,0]$, трансверсально пересекает дугу T_ε^2 в точке с координатой $x=\theta(v,\varepsilon)$, где $\theta\in C^r$, $\theta(0,\varepsilon)=\tilde Y(\varepsilon)=\varepsilon_2$, $\theta'_v(v,\varepsilon)\ne 0$ при $v\ne 0$, $\theta'_v(0,\varepsilon)=0$, $\theta''_{vv}(0,\varepsilon)<0$. Можно считать, что координаты (y_1,y_2) и соответственно координаты (x,y) выбраны так, что $\theta'_v(v,\varepsilon)>0$ при $v\ne 0$. Пусть $\theta^{-1}(\cdot,\varepsilon)$ – функция, обратная к $\theta(\cdot,\varepsilon)$. Обозначим $T_\varepsilon^{2(-)}$ и $T_\varepsilon^{2(+)}$ части T_ε^2 с координатой $x<\theta(0,\varepsilon)=\varepsilon_2$ и $x>\theta(0,\varepsilon)=\varepsilon_2$.

Так как по условию (У$_1$) полутраектории L_1^+ и L_2^+ входят в точку O_1^0 по направлению прямой $x=0$, то можно считать, что число d такое, что L_1^+ и L_2^+ пересекают дугу T_0^1 в ее внутренних точках. Тогда $\bar v$, $0<\bar u<kd$ и $0<\delta_5<\min\{\delta_4,\bar u\}$ можно выбрать так, что $\forall\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in(-\delta_5,\delta_5)^2$ положительная полутраектория поля X_ε, выходящая из точки дуги T_ε^3 с координатой $z_1=Z_1(\varepsilon)+v$, $v\in[-\bar v,0]$, пересекает дугу T_ε^1 в точке с координатой $x=\eta(v,\varepsilon)$, где $\eta\in C^r$, $\eta'_v(v,\varepsilon)>0$, а положительная полутраектория, выходящая из точки дуги T_ε^2 с координатой $x=u$, $u\in[\varepsilon_2,\bar u]$, пересекает дугу T_ε^1 в точке с координатой $x=\tilde\eta(u,\varepsilon)$, где $\tilde\eta\in C^{r-1}$, $\tilde\eta'_u(u,\varepsilon)>0$.

4. Функции последования и функции расхождения. При $\varepsilon\in(0,\delta_5)\times(-\delta_5,\delta_5)$ определим функции последования $f(u,\varepsilon):=\varphi(\eta(\theta^{-1}(u,\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon)$, $u\in[\underline{u}(\varepsilon),\varepsilon_2]$, $\underline{u}(\varepsilon)=\theta(-\bar v,\varepsilon)$, и $\tilde f(u,\varepsilon):=\varphi(\tilde\eta(u,\varepsilon),\varepsilon)$, $u\in[\varepsilon_2,\bar v]$, функции расхождения $d(v,\varepsilon):=\left[f(u,\varepsilon)-u\right]_{u=\theta(v,\varepsilon)}=\varphi(\eta(v,\varepsilon),\varepsilon)-\theta(v,\varepsilon)$, $v\in[-\bar v,0]$, и $\tilde d(u,\varepsilon):=\tilde f(u,\varepsilon)-u$,

$u\in[\varepsilon_2,\overline{u}]$. Ясно, что

$$\widetilde{f}(\hat{u},\varepsilon)=\hat{u},\ \ \widetilde{f}_u'(\hat{u},\varepsilon)<1\ \left(\widetilde{f}_u'(\hat{u},\varepsilon)>1\right)\Leftrightarrow \widetilde{d}(\hat{u},\varepsilon)=0,\ \ \widetilde{d}_u'(\hat{u},\varepsilon)<0\ \left(\widetilde{d}_u'(\hat{u},\varepsilon)<0\right) \tag{13}$$

Так как $f_u'(u,\varepsilon)=\dfrac{d_v'(v,\varepsilon)}{\theta_u'(u,\varepsilon)}-1$, $f_{uu}''(u,\varepsilon)=\dfrac{d_{vv}''(,\varepsilon)-d_v'(v,\varepsilon)\theta_{uu}''(u,\varepsilon)}{(\theta_u'(u,\varepsilon))^2}$ при $v=\theta^{-1}(u,\varepsilon)$, то

$$f(\hat{u},\varepsilon)=\hat{u},\ \ f_u'(\hat{u},\varepsilon)<1\ \left(f_u'(\hat{u},\varepsilon)>1\right)\Leftrightarrow d(\widetilde{v},\varepsilon)=0,\ \ d'_v(\widetilde{v},\varepsilon)<0\ \left(d_v'(\hat{v},\varepsilon)>0\right),\ \hat{v}=\theta^{-1}(\hat{u},\varepsilon), \tag{14}$$

$$f(\hat{u},\varepsilon)=\hat{u},\ \ f_u'(\hat{u},\varepsilon)=1,\ f_{uu}''(\hat{u},\varepsilon)\neq 0\ \Leftrightarrow d(\hat{v},\varepsilon)=d'_v(\hat{v},\varepsilon)=0,\ d_{vv}''(\hat{v},\varepsilon)\neq 0,\ \hat{v}=\theta^{-1}(\hat{u},\varepsilon). \tag{15}$$

Из неравенства $\theta_{vv}''(0,0)<0$, равенства $\theta_{\varepsilon_2}'(0,0)=1$ и (5) получаем, что $\overline{v}$ и δ_5 можно читать столь малыми, что для всех $v\in[-\overline{v},0]$, $\varepsilon\in(0,\delta_5)\times(-\delta_5,\delta_5)$

$$d_{vv}''(v,\varepsilon)>0, \tag{16}$$

$$d_{\varepsilon_2}'(v,\varepsilon)<0. \tag{17}$$

Так как $\theta(0,0)=0$, а $\theta_v'(v,0)>0$ при $v\in[-\overline{v},0)$, то $\theta(-\overline{v},0)<0$, и потому $\delta\in(0,\delta_5]$ можно выбрать так, что $\forall\varepsilon\in(0,\delta)\times(-\delta,\delta)$ $\theta(-\overline{v},\varepsilon)<-k\varepsilon_1<\varphi(\eta(-\overline{v},\varepsilon),\varepsilon)$. Следовательно,

$$d(-\overline{v},\varepsilon)>0 \quad \text{при всех} \quad \varepsilon\in(0,\delta)\times(-\delta,\delta). \tag{18}$$

Поскольку $d_v'(-\overline{v},\varepsilon)=\varphi_u'(\eta(-\overline{v},\varepsilon),\varepsilon)\eta_v'(-\overline{v},\varepsilon)-\theta_v'(-\overline{v},\varepsilon)$, а $\theta_v'(-\overline{v},0)>0$, то из (5) следует, что δ можно взять столь малым, что

$$d_v'(-\overline{v},\varepsilon)<0 \quad \text{при всех} \quad \varepsilon\in(0,\delta)\times(-\delta,\delta). \tag{19}$$

При $v\in[-\overline{v},0]$, $\varepsilon_1\in(0,\delta)$, $\varepsilon_2=-\varepsilon_1$ имеем $d(v,\varepsilon)\geq -k\varepsilon_1-\varepsilon_2=-k\varepsilon_1+\varepsilon_1$. Так как $k<1$, то

$$d(v,\varepsilon)>0 \quad \text{при всех} \quad v\in[-\overline{v},0],\ \varepsilon_1\in(0,\delta),\ \varepsilon_2=-\varepsilon_1. \tag{20}$$

Аналогично получаем

$$d(0,\varepsilon)<0 \quad \text{при всех} \quad \varepsilon_1\in(0,\delta),\ \ \varepsilon_2=\varepsilon_1. \tag{21}$$

Поскольку $d_v'(0,\varepsilon)=\varphi_u'(\eta(0,\varepsilon),\varepsilon)\eta_v'(0,\varepsilon)-\theta_v'(0,\varepsilon)$, а $\theta_v'(0,\varepsilon)=0$, то

$$d_v'(0,\varepsilon)>0 \quad \text{при всех} \quad \varepsilon\in(0,\delta)\times(-\delta,\delta). \tag{22}$$

Из равенств

$$\tilde{d}(u,\varepsilon)=\varphi(\tilde{\eta}(\varepsilon_2,\varepsilon),\varepsilon)-u,\qquad \tilde{d}_u'(u,\varepsilon)=\tilde{\eta}_u'(u,\varepsilon)\varphi_s'(s,\varepsilon)\Big|_{s=\eta(u,\varepsilon)}-1,$$

$$\tfrac{\partial}{\partial\varepsilon_2}\tilde{d}(\varepsilon_2,\varepsilon)=[\varphi_s'(s,\varepsilon)\tilde{\eta}_u'(\varepsilon_2,\varepsilon)+\varphi_{\varepsilon_2}'(s,\varepsilon)]_{s=\tilde{\eta}(\varepsilon_2,\varepsilon)}-1,$$

и неравенств (5) получаем, что δ можно считать выбранным так, что

$$\tilde{d}(\overline{u},\varepsilon)<0 \quad \text{при всех} \quad \varepsilon\in(0,\delta)\times(-\delta,\delta), \tag{23}$$

$$\tilde{d}_u'(u,\varepsilon)<0 \quad \text{при всех} \quad \varepsilon\in(0,\delta)\times(-\delta,\delta),\ u\in[\varepsilon_2,\overline{u}], \tag{24}$$

$$\tfrac{\partial}{\partial\varepsilon_2}\tilde{d}(\varepsilon_2,\varepsilon)<0,\quad \text{при всех}\ \ \varepsilon\in(0,\delta)\times(-\delta,\delta). \tag{25}$$

Аналогично неравенствам (20) и (21) доказывается, что

$$\tilde{d}(\varepsilon_2,\varepsilon)>0\quad (\text{соотв. } \tilde{d}(\varepsilon_2,\varepsilon)<0),\quad \text{если}\quad \varepsilon_1\in(0,\delta),\ \varepsilon_2=-\varepsilon_1\quad (\text{соотв. } \varepsilon_2=\varepsilon_1). \tag{26}$$

5. Бифуркации рождения замкнутых траекторий. Из (16), (19) и (22) получаем, что $\forall\varepsilon\in(0,\delta)\times(-\delta,\delta)$ $d(\cdot,\varepsilon)$ имеет единственную точку минимума $\mu(\varepsilon)\in(-\overline{v},0)$, при этом $\mu(\cdot)\in C^r$. Из (17), (20) и (21) следует, что для $m(\varepsilon):=d(\mu(\varepsilon),\varepsilon)$ при всех

$\varepsilon \in (0,\delta)\times(-\delta,\delta)$ имеют место неравенства $m'_{\varepsilon_2}(\varepsilon)<0$, $m(\varepsilon_1,-\varepsilon_1)>0$, $m(\varepsilon_1,\varepsilon_1)<0$. Поэтому для любого $\varepsilon_1 \in (0,\delta)$ существует число $\beta_1(\varepsilon_1)\in(-\varepsilon_1,\varepsilon_1)$ такое, что

$$\operatorname{sgn} m(\varepsilon) = \operatorname{sgn}(\beta_1(\varepsilon_1)-\varepsilon_2) \quad \text{при всех} \quad \varepsilon \in (0,\delta)\times(-\delta,\delta). \tag{27}$$

Поскольку $m'_{\varepsilon_2}(\varepsilon_1,\beta_1(\varepsilon_1))\neq 0$, то из (27) и теоремы о неявной функции следует, что $\beta_1(\cdot)\in C^r$.

Вследствие (17), (21) и неравенства $d(0,\varepsilon)>m(\varepsilon)=0$ при $\varepsilon_2=\beta_1(\varepsilon_1)$ для любого $\varepsilon_1\in(0,\delta)$ существует число $\beta_2(\varepsilon_1)\in(\beta_1(\varepsilon_1),\varepsilon_1)$ такое, что $\beta_2(\cdot)\in C^r$,

$$\operatorname{sgn} d(0,\varepsilon)=\operatorname{sgn}(\beta_2(\varepsilon_1)-\varepsilon_2) \quad \text{для всех} \quad \varepsilon\in(0,\delta)\times(-\delta,\delta); \tag{28}$$

Из (18), (27) и (28) следует, что функция $d(\cdot,\varepsilon)$ при $-\delta<\varepsilon_2<\beta_1(\varepsilon_1)$ не имеет нулей, при $\varepsilon_2=\beta_1(\varepsilon_1)$ имеет один двукратный нуль $\mu(\varepsilon)$, при $\beta_1(\varepsilon_1)<\varepsilon_2\le\beta_2(\varepsilon_1)$ имеет два простых нуля $v_-(\varepsilon)\in(-\bar v,\mu(\varepsilon))$ и $v_+(\varepsilon)\in(\mu(\varepsilon),0)$, при $\varepsilon_2=\beta_2(\varepsilon_1)$ имеет два простых нуля $v_-(\varepsilon)\in(-\bar v,\mu(\varepsilon))$ и $v_+(\varepsilon)=0$, при $\beta_2(\varepsilon_1)<\varepsilon_2<\delta$ имеет единственный простой нуль $v_-(\varepsilon)\in(-\bar v,\mu(\varepsilon))$, при этом $v_\pm(\cdot)\in C^r$, $\operatorname{sgn} d'_v(v_\pm(\cdot),\varepsilon)=\pm1$. Отсюда и из (14) и (15) получаем следующие утверждения. При $-\delta<\varepsilon_2<\beta_1(\varepsilon_1)$ $f(\cdot,\varepsilon)$ не имеет неподвижных точек, а поле X_ε не имеет замкнутых траекторий, пересекающих $T_\varepsilon^{2(-)}$. При $\varepsilon_2=\beta_1(\varepsilon_1)$ $f(\cdot,\varepsilon)$ имеет единственную (двукратную) неподвижную точку $\theta(\mu(\varepsilon),\varepsilon)$, а $T_\varepsilon^{2(-)}$ пересекает единственная замкнутая траектория поля X_ε – двойной цикл $\Gamma^-(\varepsilon)$. При $\beta_1(\varepsilon_1)<\varepsilon_2<\beta_2(\varepsilon_1)$ ($\varepsilon_2=\beta_2(\varepsilon_1)$) $f(\cdot,\varepsilon)$ имеет две неподвижные точки $\theta(v_-(\varepsilon),\varepsilon)$ и $\theta(v_+(\varepsilon),\varepsilon)$, а дугу $T_\varepsilon^{2(-)}$ пересекают устойчивая гиперболическая замкнутая траектория $\Gamma_s^-(\varepsilon)$ и неустойчивая гиперболическая замкнутая траектория $\Gamma_u^-(\varepsilon)$ (неустойчивая замкнутая траектория $\Gamma_u^-(\varepsilon)$, проходящая через развилку $O_2(\varepsilon)$). При $\beta_2(\varepsilon_1)<\varepsilon_2<\delta$ $f(\cdot,\varepsilon)$ имеет единственную (устойчивую гиперболическую) неподвижную точку $\theta(v_-(\varepsilon),\varepsilon)$, а $T_\varepsilon^{2(-)}$ пересекает единственная (устойчивая гиперболическая) замкнутая траектория $\Gamma_s^-(\varepsilon)$.

Из (25) и (26) следует, что для любого $\varepsilon_1\in(0,\delta)$ существует такое $\beta_3(\varepsilon_1)\in(-\varepsilon_1,\varepsilon_1)$, что $\operatorname{sgn}\tilde d(\varepsilon_2,\varepsilon)=\operatorname{sgn}(\beta_3(\varepsilon_1)-\varepsilon_2)$ для $\varepsilon\in(0,\delta)\times(-\delta,\delta)$; при этом $\beta_3(\cdot)\in C^r$. Так как $\tilde f(\varepsilon_2,\varepsilon)>f(\varepsilon_2,\varepsilon)$, то $\tilde d(\varepsilon_2,\varepsilon)\big|_{\varepsilon_2=\beta_2(\varepsilon_1)}>d(0,\varepsilon)\big|_{\varepsilon_2=\beta_2(\varepsilon_1)}=0$, и потому для любого $\varepsilon_1\in(0,\delta)$ $\beta_2(\varepsilon_1)<\beta_3(\varepsilon_1)$. Ввиду (23), (24) и (13) функция последования $\tilde f(\cdot,\varepsilon)$ имеет на $[0,\bar u]$ единственную неподвижную точку $u_0\in(0,\bar u)$ при $-\delta<\varepsilon_2<\beta_3(\varepsilon_1)$ и $u_0=0$ при $\varepsilon_2=\beta_3(\varepsilon_1)$, эта точка устойчивая и гиперболическая и не имеет неподвижных точек при $\beta_3(\varepsilon_1)<\varepsilon_2<\delta$. Тогда поле X_ε при $-\delta<\varepsilon_2<\beta_3(\varepsilon_1)$ имеет устойчивую гиперболическую замкнутую траекторию $\Gamma_2(\varepsilon)$, пересекающую дугу $T_\varepsilon^{2(+)}$, а при $\varepsilon_2=\beta_3(\varepsilon_1)$ имеет замкнутую траекторию $\Gamma_2(\varepsilon)$, проходящую через точку $O_2(\varepsilon)$, устойчивую слева и неустойчивую справа.

Так как $\bar u$ можно выбрать сколь угодно малым, то топологический предел $\operatorname*{lt}_{\varepsilon\to0}\Gamma_2(\varepsilon)=\Gamma_2^0$, то есть $\Gamma^+(\varepsilon)$ рождается из контура Γ_1^0. Если существует последовательность Γ_p, $p \in \mathbf{N}$, замкнутых траекторий векторных полей X_{ε^m}, $\varepsilon^m \in (-\delta,\delta)^2$, не содержащих дуг линии S_2, для которой $\operatorname{lt}\limits_{m\to\infty} \Gamma_m = \Gamma_2^0$, то найдется такой номер p_0, что Γ_p при $p \geq p_0$ пересекается с дугой $T_{\varepsilon^m}^{2(+)}$ и потому совпадает с $\Gamma_2^s(\varepsilon^m)$. Следовательно, $\Gamma_2(\varepsilon)$ – единственная замкнутая траектория поля X_ε, рождающаяся из контура Γ_2^0. Аналогично, $\Gamma_1^s(\varepsilon)$ и $\Gamma_1^u(\varepsilon)$ – единственные траектории, не содержащих дуг линии S_2, рождающиеся из Γ_1^0.

При $\varepsilon \in \{0\} \times (-\delta,\delta)$ (соотв. $\varepsilon \in (-\delta,0) \times (-\delta,\delta)$) все траектории, пересекающие дугу T_ε^2, ω-предельны к сшитому седло-узлу (соотв. к узлу). Поэтому замкнутых траекторий, рождающихся из Γ_0^+ и Γ_0^-, нет.

Примечания

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Москва: Наука, 1985. 224 с.

2. Guardia M., Seara T.M., Teixeira M.A. Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems // J. of Differential Equations. 2011. Vol. 250, No. 4. P. 1967–2023. DOI: 10.1016/j.jde.2010.11.0163

3. Kuznetsov Ju.A., Rinaldi S., Granini A. One-parameter bifurcations in planar Filippov systems // International Journal of Bifurcations and Chaos. 2003. Vol. 13, No. 8. P. 2157–2188.

4. Ройтенберг В.Ш. О рождении странного аттрактора из точки стыка линий разрыва векторного поля // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер.: Естественно-математические и технические науки. 2016. Вып. 4 (191). С. 53–59. URL: http://vestnik.adygnet.ru

5. Ройтенберг В.Ш. О бифуркациях в окрестности особой точки типа «сшитый трехкратный фокус» // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2017. № 2 (42). С. 18–31. DOI: 10.21685/2072-3040-2017-2-2

6. Simpson D.J.W. A compendium of Hopf-like bifurcations in piecewise-smooth dynamical systems // arXiv: 1 894.1 109v1 [math DS] 30 Apr 2018. 11 p.

7. Ройтенберг В.Ш. О бифуркациях петель сепаратрис особых точек на линии разрыва. Ярославль: Яросл. политехн. ин-т., 1987. 26 с. Деп. в ВИНИТИ 22.04.1987, № 2795-В87.

8. Ройтенберг В.Ш. О бифуркациях кусочно-гладкого векторного поля в окрестности петли сепаратрисы особой точки на линии разрыва // Математика и математическое образование. Теория и практика: межвуз. сб. науч. тр. Ярославль, 2006. Вып. 5. С. 49–52.

9. Ройтенберг В.Ш. О бифуркациях сшитого тройного цикла // Математика и математическое образование. Теория и практика: межвуз. сб. науч. тр. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2014. Вып. 9. С. 54–67. URL: https://www.ystu.ru/information/university/nauka

10. Ройтенберг В.Ш. О рождении предельных циклов из контура, образованного сепаратрисами седла и сшитого седло-узла кусочно-гладкого векторного поля // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. 2014. Т. 20, № 2. С. 26–30.

11. Ройтенберг В.Ш. О бифуркациях предельного цикла, проходящего через точку пересечения линий разрыва векторного поля и касающегося одной из них // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер.: Математика. Физика. 2018. Т. 50, № 1. С. 21–34. DOI: 10.18413/2075-4639-2018-50-1-21-34

12. Ройтенберг В.Ш. О бифуркациях петли сепаратрисы двумерной кусочно-гладкой динамической системы // Известия вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. № 1 (53). С. 36–50. DOI: 10.21685/2072-3040-2020-1-3

References

1. Filippov A.F. Differential equations with a discontinuous right-hand side. Moscow: Nauka, 1985. 224 p.

2. Guardia M., Seara T.M., Teixeira M.A. Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems // J. of Differential Equations. 2011. Vol. 250, No. 4. P. 1967–2023. DOI: 10.1016/j.jde.2010.11.0163

3. Kuznetsov Ju.A., Rinaldi S., Granini A. One-parameter bifurcations in planar Filippov sys-

tems // International Journal of Bifurcations and Chaos. 2003. Vol. 13, No. 8. P. 2157–2188.

4. Roytenberg V.Sh. On the generation of a strange attractor from a joining point of lines of discontinuity of a vector field // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser.: Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2016. Iss. 4 (191). P. 53–59. URL: http://vestnik.adygnet.ru

5. Roytenberg V.Sh. On bifurcations in the neighborhood of a singular point of the triple sewn focus type // News of Higher Educational Institutions. Volga Region. Physical and Mathematical Sciences. 2017. No. 2 (42). P. 18–31. DOI: 10.21685/2072-3040-2017-2-2

6. Simpson D.J.W. A compendium of Hopf-like bifurcations in piecewise-smooth dynamical systems // arXiv: 1 894.1 109v1 [math DS] 30 Apr 2018. 11 p.

7. Roytenberg V.Sh. On two-parameter bifurcations of separatrix contours. Yaroslavl: Yaroslavl Polytechnic Institute, 1987. 26 p. Dep. in VINITI 22.04.1987, No. 2795-B87.

8. Roytenberg V.Sh. On bifurcations of a piecewise-smooth vector field in a neighborhood of a separatrix loop of a singular point on a discontinuity line // Mathematics and Mathematical Education. Theory and Practice: Inter-Higher School Coll. of Scientific Works. Yaroslavl, 2006. Iss. 5. P. 49–52.

9. Roytenberg V.Sh. On bifurcations of a sewn triple cycle // Mathematics and mathematical education. Theory and practice: inter-higher school coll. of scient. works. Yaroslavl: YaSTU Publishing House, 2014. P. 54–67. URL: https://www.ystu.ru/information/university/nauka

10. Roytenberg V.Sh. On the generation of limit cycles out of a contour formed by separatrixes of a saddle and a sewn saddle-node of a piecewise smooth vector field // Bulletin of Kostroma State University named after N.A. Nekrasov. 2014. Vol. 20, No. 2. P. 26–30.

11. Roytenberg V.Sh. On bifurcations of a limit cycle passing through the point of intersection of the discontinuity lines of a vector field and tangent to one of them // Belgorod State University Scientific Bulletin. Ser.: Mathematics. Physics. 2018. Vol. 50, No. 1. P. 21–34. DOI: 10.18413/2075-4639-2018-50-1-21-34

12. Roytenberg V.Sh. On the separatrix loop bifurcations of two-dimensional piecewise-smooth dynamic system // News of Higher Educational Institutions. Volga Region. Physical and Mathematical Sciences. 2020. No. 1 (53). P. 36–50. DOI: 10.21685/2072-3040-2020-1-3

Статья поступила в редакцию 11.08.2023; *одобрена после рецензирования 21.08.2023*; *принята к публикации 22.08.2023*.

The article was submitted 11.08.2023; *approved after reviewing 21.08.2023*; *accepted for publication 22.05.2023*.