МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья
УДК 517.925
ББК 22.161.6
Т 49
DOI: 10.53598/2410-3225-2023-4-331-11-21

О предельных циклах квадратичных дифференциальных систем, имеющих два фокуса*

(*Рецензирована*)

Вячеслав Бесланович Тлячев[1], Дамир Салихович Ушхо[2]

[1, 2] *Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия*
[1] *tlyachev@adygnet.ru*
[2] *damirubych@mail.ru*

Аннотация. *Получены достаточные условия отсутствия предельных циклов у квадратичных систем, имеющих в фазовой плоскости два и только два простых состояния равновесия, если эти состояния равновесия – фокусы. С помощью аффинных преобразований фазовых переменных определены критерии, которые позволяют из множества всех квадратичных систем выделить класс систем, имеющих два и только два простых состояния равновесия. Приведены примеры, подтверждающие сформулированные утверждения.*

Ключевые слова: *автономная динамическая система на плоскости, квадратичная система, состояние равновесия, узел, фокус, предельный цикл*

Original Research Paper

On limit cycles of quadratic differential systems having two focuses**

Vyacheslav B. Tlyachev[1], Damir S. Ushkho[2]

[1, 2] *Adyghe State University, Maykop, Russia*
[1] *tlyachev@adygnet.ru*
[2] *damirubych@mail.ru*

Abstract. *Sufficient conditions are obtained for the absence of limit cycles in quadratic systems having two and only two simple equilibrium states in the phase plane, if these equilibrium states are focuses. With the help of affine transformations of phase variables, criteria are determined that allow us to distinguish from the set of all quadratic systems a class of systems having two and only two simple equilibrium states. Examples confirming the formulated statements are given.*

Keywords: *autonomous dynamical system on a plane, quadratic system, equilibrium state, node, focus, limit cycle*

Известно [1], что состояния равновесия типа «узел» дифференциальных систем вида:

---

* *Основное содержание данной работы было представлено в докладе на Третьей конференции математических центров России, Майкоп, 10–15 октября 2023 г.*

** *The main content of this work was presented in a report at the Third Conference of Mathematical Centers of Russia, Maykop, October 10–15, 2023.*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{2} a_{ij} x^i y^j \equiv P_2(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{2} b_{ij} x^i y^j \equiv Q_2(x, y), \end{cases} \tag{1}$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in R, (P_2, Q_2) = 1$, не окружают предельные циклы. Но в случае состояния равновесия типа «фокус» для таких систем возникает вопрос о существовании или отсутствии предельных циклов. Так, в работе [2] построен пример системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 + xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \end{cases} \tag{*}$$

имеющей в ограниченной части фазовой плоскости два и только два состояния равновесия. Эти состояния равновесия являются простыми фокусами, один из которых окружен тремя предельными циклами, а другой – одним циклом. Вычисления показывают, что на прямой изоклине $x + 3y + 2 = 0$ системы (*), проходящей через фокусы $A(1, -1)$ и $B(-3, 1/3)$, в условиях теоремы 2 [2] индуцировано направление $m = 25945856$.

С помощью простого преобразования

$$\begin{cases} x = \bar{x} + \bar{y}, \\ y = m\bar{y} \end{cases}$$

система (*) приводится к системе:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \left(\dfrac{25}{3243232} x + \dfrac{52591548928500457}{2027-20000} y - \dfrac{6323}{2685396096000} \right) \left(x + 77837569y + 2 \right), \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{155706751}{6713490240000} - \dfrac{41393677}{2685396096000} x + \dfrac{1971039340787}{2685396096000} y + \dfrac{1944301959}{1013510000} xy + \\ + \dfrac{999262700991529489}{46621460000} y^2 - \dfrac{25}{3243232} x^2. \end{cases} \tag{**}$$

В результате приведенного выше преобразования прямая изоклина $x + 3y + 2 = 0$ системы (*) трансформировалась в изоклину бесконечности $x + 77837569y + 2 = 0$ системы (**), то есть система (*) преобразована в систему (**) канонического вида [3].

В данной работе изучается вопрос об отсутствии предельных циклов систем вида (1) в случае, когда они имеют на фазовой плоскости два и только два состояния равновесия, и они являются простыми фокусами. В дальнейшем для удобства о системах вида (1) будем говорить в единственном числе.

Теорема 1. *Пусть система* (1) *имеет в некоторой части фазовой плоскости два и только два состояния равновесия* A *и* B, *пусть при этом они являются одновременно седлами или антиседлами. Тогда:*

1) A *и* B *– это общие точки двух изоклин: прямой* l_1 *и гиперболы* L;

2) *через* A *и* B *проходят прямые изоклины* l_3 *и* l_4 *соответственно, отличные от* l_1, *тогда и только тогда, когда прямая изоклина* l_2 *системы* (1), *пересекающая прямую* l_1 *в точке, лежащей между состояниями равновесия* A *и* B, *есть асимптота гиперболы* L.

Доказательство. Известно [3, 4], что прямая, проходящая через два состояния равновесия системы (1), является ее изоклиной. Поэтому прямая l_1, которой принадлежат состояния равновесия A и B, есть изоклина системы (1). В силу [5] через каждое состояние равновесия системы (1) проходит не более трех прямых изоклин. Следовательно, в семействе изоклин

$$Q_2(x,y) - mP_2(x,y) = 0 \tag{2}$$

системы (1) имеется сколь угодно много неприводимых кривых второго порядка. Пусть L – одна из таких кривых. По теореме 2.6 [3] на прямой l_1 и кривой L индуцированы различные направления (под направлением индукции на изоклине из семейства (2) подразумевается значение постоянной m).

Пусть на прямой l_1 (кривой L) индуцировано направление m_1 (m_2), где $m_1 \neq m_2$. Преобразование

$$\begin{cases} x = \bar{x} + \bar{y}, \\ y = m_1\bar{x} + m_2\bar{y} \end{cases} \tag{3}$$

переводит систему (1) в систему

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{dt} = \bar{P}_2(\bar{x},\bar{y}), \\ \dfrac{d\bar{y}}{dt} = (a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1)(a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + c_2). \end{cases} \tag{4}$$

Согласно работе [3], прямая изоклина l_1 (изоклина L) системы (1) перешла в результате преобразования (3) в изоклину нуля $\bar{l}_1 : a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1 = 0$ (изоклину бесконечности $\bar{L} : \bar{P}_2(\bar{x},\bar{y}) = 0$) системы (4). Поскольку состояния равновесия $\bar{A}$ и $\bar{B}$, принадлежащие прямой $\bar{l}_1 : a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1 = 0$, имеют один и тот же индекс Пуанкаре, то по теореме 36 [6] прямая изоклина $\bar{l}_2 : a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + c_2 = 0$ пересекает прямую $\bar{l}_1$ в точке (обозначим ее C), расположенной между $\bar{A}$ и $\bar{B}$. Утверждаем, что изоклина бесконечности $\bar{L} : \bar{P}_2(\bar{x},\bar{y}) = 0$ системы (4) не может быть ни эллипсом, ни параболой. Действительно, в противном случае система (4) имела бы, по крайней мере, одно состояние равновесия на изоклине $\bar{l}_2$, а это противоречит условию теоремы. Таким образом, любая неприводимая кривая семейства изоклин (2) может быть только гиперболой.

Совершим в системе (4) параллельный перенос

$$\begin{cases} \bar{x} = \tilde{x} + \bar{x}_0, \\ \bar{y} = \tilde{y} + \bar{y}_0, \end{cases}$$

где $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ – центр симметрии гиперболы $\bar{L}$ (условимся при этом сохранить обозначения фазовых переменных $\bar{x}, \bar{y}$):

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{dt} = \alpha\bar{x}^2 + \beta\bar{x}\bar{y} + \gamma\bar{y}^2 + \omega, \\ \dfrac{d\bar{y}}{dt} = (A_1\bar{x} + B_1\bar{y} + C_1)(A_2\bar{x} + B_2\bar{y} + C_2), \end{cases} \tag{5}$$

где $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0, \alpha\gamma < 0, \omega \neq 0$.

Состояниями равновесия системы (5) являются точки $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ пересечения прямой изоклины $\widetilde{l}_1 : A_1\bar{x} + B_1\bar{y} + C_1 = 0$ с гиперболой $\widetilde{L} : \alpha\bar{x}^2 + \beta\bar{x}\bar{y} + \gamma\bar{y}^2 + \omega = 0$. При этом изоклина нуля $\widetilde{l}_2 : A_2\bar{x} + B_2\bar{y} + C_2 = 0$ не имеет общих точек с гиперболой $\widetilde{L}$. Пусть через состояния равновесия $\tilde{A}\ (\tilde{B})$ системы (5) проходят прямые изоклины $\widetilde{l}_3(\widetilde{l}_4)$. Каждая из этих прямых параллельна одной и той же асимптоте гиперболы $\widetilde{L}$, так как в противном случае хотя бы одна из прямых $\widetilde{l}_3$ и $\widetilde{l}_4$ пересекает гиперболу $\widetilde{L}$ в точке, отличной от $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$. Это противоречит условию теоремы, согласно которому система (5), кроме точек $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$, не имеет в определенной части фазовой плоскости состояний равновесия. Пусть h – асимптота гиперболы $\widetilde{L}$, которой параллельны прямые изоклины $\widetilde{l}_3$ и $\widetilde{l}_4$. Тогда любая прямая, параллельная асимптоте h, отличная от нее и прямых $\widetilde{l}_3$ и $\widetilde{l}_4$, непременно пересекает гиперболу $\widetilde{L}$ в точке, отличной от $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$. Поэтому прямая изоклина $\widetilde{l}_2$ совпадает с асимптотой h гиперболы $\widetilde{L}$.

Пусть далее $\widetilde{l}_2$ – асимптота гиперболы $\widetilde{L}$. Покажем, что через точки $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ проходят прямые изоклины $\widetilde{l}_3$ и $\widetilde{l}_4$ соответственно, параллельные прямой $\widetilde{l}_2$. Перепишем систему (5) в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{dt} = \alpha\bar{x}^2 + \beta\bar{x}\bar{y} + \gamma\bar{y}^2 + \omega, \\ \dfrac{d\bar{y}}{dt} = (A_1\bar{x} + B_1\bar{y} + C_1)(\bar{y} - k_1\bar{x}), \end{cases} \tag{6}$$

где $\bar{y} - k_1\bar{x} = 0,\ \bar{y} - k_2\bar{x} = 0\ (k_1 \neq k_2)$ – асимптоты гиперболы $\widetilde{L}$.

Применим к системе (6) преобразование

$$\begin{cases} x' = \bar{y} - k_1\bar{x}, \\ y' = \bar{y} - k_2\bar{x}, \end{cases}$$

результатом будет система:

$$\begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} = (M_1x' + N_1y' + K_1)x' - k_1(r + sx'y') \equiv W(x', y'), \\ \dfrac{dy'}{dt} = (M_1x' + N_1y' + K_1)x' - k_2(r + sx'y') \equiv V(x', y'),\ k_1k_2rs \neq 0. \end{cases} \tag{7}$$

Состояниями равновесия системы (7) являются точки $A'(x_1', y_1')$ и $B'(x_2', y_2')$ пересечения прямой изоклины $M_1x' + N_1y' + K_1 = 0$ с гиперболой $L' : r + sx'y' = 0$. Поэтому выполняются условия:

$$M_1x_1' + N_1y_1' + K_1 = 0, \quad r + sx_1'y_1' = 0. \tag{8}$$

$$M_1x_2' + N_1y_2' + K_1 = 0, \quad r + sx_2'y_2' = 0. \tag{9}$$

Из (7) с учетом (8) следует соотношение

$$\frac{V(x_1', y')}{W(x_1', y')} \equiv \frac{N_1x_1' - k_2\ sx_1'}{N_1x_1' - k_1sx_1'} = \frac{N_1 - k_2\ s}{N_1 - k_1s} - \text{const},$$

согласно которому прямая $x' = x_1'$, проходящая через точку A', есть изоклина системы (7).

Аналогично из (7) с учетом (9) доказывается, что прямая $x' = x_2'$, проходящая через точку B', является изоклиной системы (7).

Теорема доказана.

Следствие 1. Если прямая изоклина $\bar{l}_2$ системы (4) не совпадает ни с одной из асимптот гиперболы $\overline{P}_2(\bar{x},\bar{y})=0$, то в условиях теоремы 1 эта система имеет только две прямые изоклины, а именно изоклины нуля.

Впрочем, система (**) в качестве изоклины нуля имеет гиперболу, а изоклина бесконечности этой системы представляет собой пару пересекающихся прямых. Прямых изоклин, отличных от изоклин бесконечности, система не имеет.

Замечание 1. Под антиседлом понимается простое состояние равновесия системы, не являющееся седлом.

Рассмотрим систему (4) в том случае, когда через состояния равновесия $\overline{A}$ и $\overline{B}$ проходят прямые изоклины $\bar{l}_3$ и $\bar{l}_4$ соответственно. Так как $\overline{A}$ и $\overline{B}$ – простые состояния равновесия, то на $\bar{l}_3$ и $\bar{l}_4$ системой (4) индуцировано одно и то же направление, отличное от направления, индуцированного на $\bar{l}_1$ и $\bar{l}_2$. По теореме 1 $\bar{l}_3$ и $\bar{l}_4$ параллельны прямой $\bar{l}_2$, следовательно, подходящим преобразованием вида (3) систему (4) можно привести к системе:

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{x}}{dt} = (a_2\tilde{x}+b_2\tilde{y}+c_3)(a_2\tilde{x}+b_2\tilde{y}+c_4), \\ \dfrac{d\tilde{y}}{dt} = (a_1\tilde{x}+b_1\tilde{y}+c_1)(a_2\tilde{x}+b_2\tilde{y}+c_2), \end{cases} \tag{10}$$

где $a_1b_2-a_2b_1\neq 0, (c_2-c_3)(c_2-c_4)(c_3-c_4)\neq 0$. Здесь и всюду в дальнейшем полагаем, что исследуемые системы не имеют инвариантных прямых. В силу этого выполняется неравенство $a_1a_2b_2\neq 0$. Состояние равновесия $W_1(W_2)$ системы (10) является точкой пересечения прямых $a_1\tilde{x}+b_1\tilde{y}+c_1=0$ и $a_2\tilde{x}+b_2\tilde{y}+c_3=0$ ($a_1\tilde{x}+b_1\tilde{y}+c_1=0$ и $a_2\tilde{x}+b_2\tilde{y}+c_4=0$).

Преобразование

$$\begin{cases} \bar{\bar{x}} = a_1\tilde{x}+b_1\tilde{y}+c_1, \\ \bar{\bar{y}} = a_2\tilde{x}+b_2\tilde{y}+c_2 \end{cases} \tag{11}$$

переводит систему (10) в систему

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{\bar{x}}}{dt} = b_1\overline{\overline{xy}}+a_1(\bar{\bar{y}}-c_2+c_3)(\bar{\bar{y}}-c_2+c_4)\equiv F(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}}), \\ \dfrac{d\bar{\bar{y}}}{dt} = b_2\overline{\overline{xy}}+a_2(\bar{\bar{y}}-c_2+c_3)(\bar{\bar{y}}-c_2+c_4)\equiv H(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}}). \end{cases} \tag{12}$$

Изоклина $\bar{\bar{y}}=0$ является трансверсалью векторного поля системы (12), поэтому наряду с системой (12) рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{\bar{x}}}{d\tau} = b_1\bar{\bar{x}}+\dfrac{a_1(\bar{\bar{y}}-c_2+c_3)(\bar{\bar{y}}-c_2+c_4)}{\bar{\bar{y}}}\equiv \overline{\overline{F}}(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}}), \\ \dfrac{d\bar{\bar{y}}}{d\tau} = b_2\bar{\bar{x}}+\dfrac{a_2(\bar{\bar{y}}-c_2+c_3)(\bar{\bar{y}}-c_2+c_4)}{\bar{\bar{y}}}\equiv \overline{\overline{H}}(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}}), \end{cases} \tag{13}$$

где $d\tau=\bar{\bar{y}}dt$.

$$\bar{\bar{F}}'_{\bar{\bar{x}}}(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}})+\bar{\bar{H}}'_{\bar{\bar{y}}}(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}})=b_1+a_2+\frac{a_2(c_2-c_4)(c_3-c_2)}{\bar{\bar{y}}^2}. \quad (14)$$

Если выражение (14) знакопостоянно, то по признаку Бендиксона [7, 8] система (13), а следовательно, и система (12) не имеет замкнутых траекторий.

Потребуем, чтобы состояния равновесия $\overline{W}_1(0,c_2-c_3)$ и $\overline{W}_2(0,c_2-c_4)$ системы (12) были фокусами. В целях определенности относительно местоположения состояний равновесия $\overline{W}_1$ и $\overline{W}_2$ полагаем, что выполнены условия

$$c_2-c_3<0,\ c_2-c_4>0. \quad (15)$$

В результате переноса начала координат в точку $\overline{W}_1$ система (12) примет вид:

$$\begin{cases}\dfrac{d\bar{\bar{x}}}{dt}=b_1(c_2-c_3)\bar{\bar{x}}+a_1(c_4-c_3)\bar{\bar{y}}+\ldots,\\ \dfrac{d\bar{\bar{y}}}{dt}=b_2(c_2-c_3)\bar{\bar{x}}+a_2(c_4-c_3)\bar{\bar{y}}+\ldots\end{cases} \quad (16)$$

Для системы (16) определяем величины

$$\sigma(\overline{W}_1)=b_1(c_2-c_3)+a_2(c_4-c_3),\ \Delta(\overline{W}_1)=(c_2-c_3)(c_4-c_3)(a_2b_1-a_1b_2),$$

$$\sigma^2(\overline{W}_1)-4\Delta(\overline{W}_1)=[b_1(c_2-c_3)-a_2(c_4-c_3)]^2+4(c_2-c_3)(c_4-c_3)a_1b_2<0. \quad (17)$$

Результатом переноса начала координат в точку $\overline{W}_2$ является система:

$$\begin{cases}\dfrac{d\bar{\bar{x}}}{dt}=b_1(c_2-c_4)\bar{\bar{x}}+a_1(c_3-c_4)\bar{\bar{y}}+\ldots,\\ \dfrac{d\bar{\bar{y}}}{dt}=b_2(c_2-c_4)\bar{\bar{x}}+a_2(c_3-c_4)\bar{\bar{y}}+\ldots\end{cases} \quad (18)$$

Для системы (18) также находим величины

$$\sigma(\overline{W}_2)=b_1(c_2-c_4)+a_2(c_3-c_4),\ \Delta(\overline{W}_2)=(c_2-c_4)(c_3-c_4)(a_2b_1-a_1b_2),$$

$$\sigma^2(\overline{W}_2)-4\Delta(\overline{W}_2)=[b_1(c_2-c_4)-a_2(c_3-c_4)]^2+4(c_2-c_4)(c_3-c_4)a_1b_2<0. \quad (19)$$

В силу неравенств (15) выполняется условие $c_3-c_4>0$. Таким образом, при выполнении (15) и неравенства

$$a_2b_1-a_1b_2>0 \quad (20)$$

состояния равновесия $\overline{W}_1$ *и* $\overline{W}_2$ – антиседла. Поэтому имеют место неравенства $\Delta(\overline{W}_1)>0$, $\Delta(\overline{W}_2)>0$. Из рассмотрения исключаем случай, когда $\sigma(\overline{W}_1)=\sigma(\overline{W}_2)=0$, так как при этом система (12) не имеет предельных циклов [9].

Теорема 2. *Если выполняются условия* (17), (19), (20), $(b_1+a_2)a_2\ge 0$, $\left|\sigma(\overline{W}_1)\right|+\left|\sigma(\overline{W}_2)\right|>0$, *то система* (12) *имеет в определенной части фазовой плоскости два фокуса*, *и при этом система ациклична*, *то есть не имеет предельных циклов.*

Замечание 2. Отсутствие замкнутых траекторий системы (12) следует из того, что в силу неравенств $c_2-c_3<0, c_2-c_4>0, (b_1+a_2)a_2\ge 0$ выражение (14) знакопостоянно.

Замечание 3. В системах (16) и (18) сознательно не указаны нелинейные члены, так как они не влияют на характер исследуемых состояний равновесия.

Пример 1. Система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = xy + 3(y+1)\left(y - \dfrac{1}{2}\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = -2xy + 2(y+1)\left(y - \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

имеет два простых состояния равновесия: устойчивый фокус $(0,-1)$ и неустойчивый фокус $(0,1/2)$. Система удовлетворяет условиям теоремы 2, поэтому она не имеет предельных циклов, окружающих фокусы. Фазовый портрет системы в диске Пуанкаре представлен на рисунке 1.

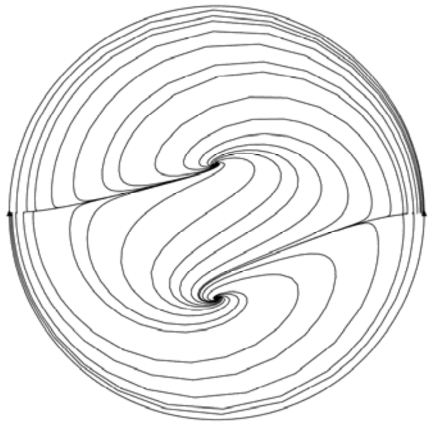

Рис. 1. Фазовый портрет системы из примера 1***
Fig. 1. Phase portrait of the system from example 1***

Теорема 3. *Если* $(c_2 - c_3)(c_2 - c_4) \neq 0,\ c_3 + c_4 - 2c_2 = 0,\ \dfrac{a_2}{a_1} \geq \dfrac{-b_2}{b_1 + 2a_2} > 0$, *то система* (12) *не имеет предельных циклов*.

Доказательство. Дивергенция векторного поля системы (12) имеет вид:

$$D(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}) \equiv \overline{\overline{F}}'_{\overline{\overline{x}}}(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}) + \overline{\overline{H}}'_{\overline{\overline{y}}}(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}) = b_2\overline{\overline{x}} + (b_1 + 2a_2)\overline{\overline{y}}.$$

Так как прямая $\overline{\overline{y}} = 0$ – трансверсаль векторного поля системы (12), то предельный цикл этой системы, если он существует, по признаку Бендиксона расположен в одной из полуплоскостей $\overline{\overline{y}} > 0$ и $\overline{\overline{y}} < 0$ и пересекает прямую $D(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}) = 0$. По условию угловой коэффициент прямой $D(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}) = 0$ не больше углового коэффициента касательных к траекториям системы (12) в точках изоклины $\overline{\overline{x}} = 0$. Поэтому в силу выпуклости замкнутых траекторий системы (1) [4] предельный цикл не может окружать состояния равновесия $\overline{W_1}$ и $\overline{W_2}$.

Теорема доказана.

Пример 2. Система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = xy + (y-2)(y+2), \\ \dfrac{dy}{dt} = -2xy + 2(y-2)(y+2) \end{cases}$$

*** *Фазовый портрет построен в программе* P4.
*** *The phase portrait was built in the* P4 *program*.

имеет два и только два состояния равновесия: простой неустойчивый фокус $(0,2)$ и простой устойчивый фокус $(0,-2)$. По теореме 3 система не имеет предельных циклов.

Далее рассмотрим систему (4) в случае, когда изоклина нуля $\bar{l}_2$ не совпадает ни с одной из асимптот гиперболы $\bar{L}: \bar{P}_2(\bar{x},\bar{y})=0$. Не умаляя общности, при этом рассмотрим систему (5), полученную из системы (4) в результате переноса начала координат в центр симметрии гиперболы $\bar{L}: \bar{P}_2(\bar{x},\bar{y})=0$. Для точки пересечения изоклин нуля системы (5) могут представиться две возможности:

1) она совпадает с началом координат;
2) она не совпадает с началом координат.

Пусть изоклины нуля системы (5) пересекаются в начале координат. Тогда систему (5) можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{dt} = \alpha\bar{x}^2 + \beta\overline{xy} + \gamma\bar{y}^2 + \omega, \\ \dfrac{d\bar{y}}{dt} = (\bar{y} - k_1\bar{x})(\bar{y} - k_2\bar{x}), \end{cases} \tag{21}$$

где $k_1 \neq k_2$.

Предположим, что состояниями равновесия системы (21) являются точки R_1 и R_2 пересечения прямой $\bar{d}_1: \bar{y} - k_1\bar{x} = 0$ с гиперболой $\tilde{L}$, а асимптотами гиперболы $\tilde{L}$ – прямые $\bar{y} - k_3\bar{x} = 0$ è $\bar{y} - k_4\bar{x} = 0,$ где $(k_2-k_3)(k_2-k_4)(k_3-k_4) \neq 0$.

В результате преобразования

$$\begin{cases} x' = \bar{y} - k_3\bar{x}, \\ y' = \bar{y} - k_4\bar{x} \end{cases} \tag{22}$$

система (21) переходит в систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} = (\alpha_1x' + \beta_1y')(\alpha_2x' + \beta_2y') - k_3(r_1 + s_1x'y'), \\ \dfrac{dy'}{dt} = (\alpha_1x' + \beta_1y')(\alpha_2x' + \beta_2y') - k_4(r_1 + s_1x'y'). \end{cases} \tag{23}$$

Отметим, что в результате преобразования (22) прямые изоклины $\bar{d}_1$ и $\bar{d}_2: \bar{y} - k_2\bar{x} = 0$ системы (21) перешли соответственно в изоклины $d_1': \alpha_1x' + \beta_1y' = 0$ и $d_2': \alpha_2x' + \beta_2y' = 0$, а гипербола $\tilde{L}$ перешла в гиперболу $L': r_1 + s_1x'y' = 0$.

Состояниями равновесия системы (23) являются точки R_1' и R_2' пересечения прямой d_1' и гиперболы $L': r_1 + s_1x'y' = 0.$

Пусть выполняется неравенство $r_1s_1 < 0$, тогда по необходимости имеют место неравенства $\alpha_1\beta_1 < 0,\ \alpha_2\beta_2 > 0$. Из (23) следует, что на гиперболе L' индуцировано направление $m = 1$, а на прямых d_1' и d_2' – направление $m = \dfrac{k_4}{k_3}$.

Теорема 4. *Если* $\alpha_2 = \beta_2 \neq 0,\ k_3k_4 > 0,\quad s_1r_1 < 0,\ \alpha_1\beta_1 < 0,\quad \operatorname{sgn}(\alpha_1 + \beta_1)\beta_2 = -\operatorname{sgn} r_1(k_3 + k_4),$ *то система* (23) *не имеет замкнутых траекторий.*

Доказательство. Так как прямая изоклина $\alpha_2x' + \alpha_2y' = 0$ – трансверсаль векторного поля системы (23), рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx'}{d\mu} = \alpha_1 x' + \beta_1 y' - \dfrac{k_3(r_1 + s_1 x'y')}{\alpha_2 x' + \beta_2 y'} \equiv F_2(x', y'), \\ \dfrac{dy'}{d\mu} = \alpha_1 x' + \beta_1 y' - \dfrac{k_4(r_1 + s_1 x'y')}{\alpha_2 x' + \beta_2 y'} \equiv H_2(x', y'),\ d\mu = (\alpha_2 x' + \beta_2 y')dt, \end{cases} \tag{24}$$

$$F'_{2x'} + H'_{2y'} = \frac{1}{\beta_2 (x' + y')^2}[\beta_2(\alpha_1 + \beta_1)(x' + y')^2 - (r_1(k_3 + k_4) - s_1(k_3 y'^2 + k_4 x'^2))]. \tag{25}$$

Выражение (25) в условиях теоремы знакопостоянно, следовательно, по признаку Бендиксона система (24) не имеет замкнутых траекторий.

Теорема доказана.

Пример 3. Система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (-2x + y)(-x - y) - (1 - xy), \\ \dfrac{dy}{dt} = (-2x + y)(-x - y) - 4(1 - xy) \end{cases}$$

имеет простой устойчивый (неустойчивый) фокус $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)\left(\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)\right)$. Система удовлетворяет условиям теоремы 4, поэтому не имеет предельных циклов.

В случае, когда точка пересечения изоклин нуля системы (5) не совпадает с началом координат, не уменьшая общности, рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{dt} = \alpha\overline{x}^2 + \beta\overline{xy} + \gamma\overline{y}^2 + \omega, \\ \dfrac{d\overline{y}}{dt} = (\overline{y} - k_1\overline{x} - b_1)(\overline{y} - k_2\overline{x} - b_2), \end{cases} \tag{26}$$

где $k_1 \neq k_2$, $|b_1| + |b_2| > 0$, $\alpha\gamma < 0$, $\omega \neq 0$.

Состояниями равновесия системы (26) будем считать точки U_1 и U_2 пересечения прямой $e_1 : \overline{y} - k_1\overline{x} - b_1 = 0$, а асимптотами гиперболы $\widetilde{L} : \alpha\overline{x}^2 + \beta\overline{xy} + \gamma\overline{y}^2 + \omega = 0$ являются прямые $\overline{y} - k_3\overline{x} = 0$, $\overline{y} - k_4\overline{x} = 0$, $(k_3 - k_4)(k_3 - k_1)(k_3 - k_2) \neq 0$.

В результате преобразования (22) система (26) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} = (\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1)(\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2) - k_3(\mu_1 + \omega_1 x'y'), \\ \dfrac{dy'}{dt} = (\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1)(\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2) - k_4(\mu_1 + \omega_1 x'y'), \end{cases} \tag{27}$$

$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$, $\mu_1\omega_1 \neq 0$, $|\gamma_1| + |\gamma_2| > 0$.

Состояниями равновесия системы (27) будут точки U'_1 и U'_2 пересечения прямой изоклины $e'_1 : \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 = 0$ с гиперболой $\mu_1 + \omega_1 x'y' = 0$.

Пусть $\mu_1\omega_1 < 0$, тогда $\alpha_1\beta_1 < 0, \alpha_2\beta_2 > 0$. Поскольку прямая изоклина $e'_2 : \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 = 0$ – трансверсаль векторного поля системы (27), то ее замкнутые траектории на основании [8] совпадают с замкнутыми траекториями системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx'}{dv} = \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 - \dfrac{k_3(\mu_1 + \omega_1 x'y')}{\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2} \equiv \Theta(x', y'), \\ \dfrac{dy'}{dv} = \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 - \dfrac{k_4(\mu_1 + \omega_1 x'y')}{\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2} \equiv \Omega(x', y'), \end{cases} \tag{28}$$

где $dv = (\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2)dt.$

$$\begin{gathered} \Theta'_{x'} + \Omega'_{y'} = \alpha_1 + \beta_1 - \frac{k_3}{(\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2)^2}(\omega_1\beta_2 y'^2 + \omega_1\gamma_2 y' - \mu_1\alpha_2) - \\ - \frac{k_4}{(\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2)^2}(\omega_1\alpha_2 x'^2 + \omega_1\gamma_2 x' - \mu_1\beta_2). \end{gathered} \tag{29}$$

Теорема 5. *Если* $\mu_1\omega_1 < 0,\ \alpha_1\beta_1 < 0,\ \alpha_2\beta_2 > 0,\ \omega_1(\omega_1\gamma_2{}^2 + 4\mu_1\alpha_2\beta_2) < 0,\ \operatorname{sgn}(\alpha_1 + \beta_1) = -\operatorname{sgn}(\omega_1\beta_2 k_3) = -\operatorname{sgn}(\omega_1\alpha_2 k_4),$ *то система* (28), *а значит*, *и система* (27) *ациклична*.

Доказательство. Запишем соотношение (29) в виде:

$$\begin{gathered} \Theta'_{x'} + \Omega'_{y'} = \alpha_1 + \beta_1 - \frac{k_3\omega_1\beta_2}{(\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2)^2}\left(y'^2 + \frac{\gamma_2}{\beta_2}y' - \frac{\mu_1\alpha_2}{\omega_1\beta_2}\right) - \\ - \frac{k_4\omega_1\alpha_2}{(\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2)^2}\left(x'^2 + \frac{\gamma_2}{\alpha_2}x' - \frac{\mu_1\beta_2}{\omega_1\alpha_2}\right). \end{gathered} \tag{30}$$

В силу неравенства $\omega_1^2\gamma_2{}^2 + 4\mu_1\omega_1\alpha_2\beta_2 < 0$ квадратные трехчлены, записанные в скобках, положительны, поэтому выражение (30) знакопостоянно во всех точках фазовой плоскости, за исключением точек прямой $\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 = 0$. По признаку Бендиксона система (29), а следовательно, и система (28) ацикличны.

Теорема доказана.

Пример 4. Система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (-2x + y + 1)(2x + 2y) - (xy - 1), \\ \dfrac{dy}{dt} = (-2x + y + 1)(2x + 2y) - 3(xy - 1) \end{cases}$$

имеет два простых состояния равновесия, а именно: устойчивый фокус $(1,1)$ и неустойчивый фокус $(-1/2, -2)$. По теореме 5 нет предельных циклов, окружающих фокусы.

Примечания

1. Воробьев А.П. К вопросу о циклах вокруг особой точки типа «узел» // Доклады АН БССР. 1960. Т. 4, № 9. С. 369–371.

2. Сидоренко И.Н. Предельные циклы нормального размера некоторых классов квадратичных систем на плоскости // Вестник БГУ. Сер. 1. 2008. № 3. С. 63–68.

3. Тун Цзинь-чжу. Расположение предельных циклов системы $\dfrac{dy}{dt} = Y_2(x, y)$, $\dfrac{dx}{dt} = X_2(x, y)$ // Периодический сборник переводов иностранных статей. Математика. 1962. Т. 6, № 6. С. 150–168.

4. Ушхо Д.С. Прямые изоклины и канонические формы полиномиальных дифференциальных систем на плоскости. Майкоп, 2007. 93 с.

5. Тлячев В.Б., Ушхо А.Д., Ушхо Д.С. О прямых изоклинах полиномиальных векторных полей на плоскости // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2014. № 2 (1). С. 148–156.

6. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. Москва: Наука, 1967. 488 с.

7. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. Москва: Наука, 1966. 568 с.

8. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. Москва: Наука, 1974. 496 с.

9. Черкас Л.А., Жилевич Л.И. Об отсутствии предельных циклов у одного дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 8, № 12. С. 2271–2273.

References

1. Vorobyev A.P. On the question of cycles around a singular point of the “node” type // Reports of the Academy of Sciences of the BSSR. 1960. Vol. 4, Iss. 9. P. 369–371.

2. Sidorenko I.N. Limit cycles of normal size of some classes of quadratic systems on the plane // Bulletin of BSU. Ser. 1. 2008. No. 3. P. 63–68.

3. Tung Chin-Chu Positions of limit cycles of the system $\frac{dy}{dt} = Y_2(x, y)$, $\frac{dx}{dt} = X_2(x, y)$ // Scientia Sinica. 1959. Vol. 8. P. 151–171. Reprinted in Chinese Math., 1966. Vol. 8. P. 854–874.

4. Ushkho D.S. Straight lines isoclines and canonical forms of polynomial differential systems on the plane. Maykop, 2007. 93 p.

5. Tlyachev V.B., Ushkho A.D., Ushkho D.S. On the straight line isoclines of polynomial vector fields on the plane // Bulletin of the Nizhny Novgorod University named after N.I. Lobachevsky. 2014. No. 2 (1). P. 148–156.

6. Theory of bifurcation of dynamic systems on a plane / A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon, A.G. Maier. New York: Wiley & Sons, 1973. 482 p.

7. Qualitative theory of second-order dynamical systems / A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon, A.G. Maier. New York: John Wiley and Sons, 1973. 568 p.

8. Bautin N.N., Leontovich E.A. Methods and techniques of qualitative research of dynamical systems on a plane. Moscow: Nauka, 1974. 496 p.

9. Cherkas L.A., Zhilevich L.I. On the absence of limit cycles in one differential equation // Differential Equations. 1972. Vol. 8, No. 12. P. 2271–2273.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Статья поступила в редакцию 23.10.2023; *одобрена после рецензирования 15.11.2023*; *принята к публикации 16.11.2023*.

The authors declare no conflicts of interests.

The article was submitted 23.10.2023; *approved after reviewing 15.11.2023*; *accepted for publication 16.11.2023*.