МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Научная статья
УДК 517.925
ББК 22.161.6
Р 65
DOI: 10.53598/2410-3225-2024-1-336-11-19

О бифуркациях сепаратрисных контуров динамических систем с инволютивной симметрией

(*Рецензирована*)

Владимир Шлеймович Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет,
Ярославль, Россия, vroitenberg@mail.ru

Аннотация. *Рассматривается двухпараметрическое семейство гладких векторных полей на плоскости, инвариантных относительно инволюции I. Предполагается, что инволюция имеет единственную неподвижную точку O, причем для векторных полей семейства точка O является гиперболическим седлом с ненулевой седловой величиной, сепаратрисы которого при нулевых значениях параметров идут в два симметричных относительно I седло-узла, образуя полицикл, гомеоморфный «восьмерке». Для типичных семейств в случаях положительной и отрицательной седловой величины получены бифуркационные диаграммы – разбиение окрестности нуля на плоскости параметров на классы топологической эквивалентности векторных полей в окрестности полицикла.*

Ключевые слова: *гладкое векторное поле на плоскости, седло, седло-узел, петля сепаратрисы, бифуркация, замкнутая траектория*

Для цитирования: *Ройтенберг В. Ш. О бифуркациях сепаратрисных контуров динамических систем с инволютивной симметрией // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. : Естественно-математические и технические науки. 2024. Вып. 1 (336). С. 11–19. DOI: 10.53598/2410-3225-2024-1-336-11-19*

Original Research Paper

On bifurcations of separatrix contours of dynamical systems with involutive symmetry

Vladimir Sh. Roytenberg

Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russia, vroitenberg@mail.ru

Abstract. *A two-parameter family of smooth vector fields on the plane that are invariant under the involution I is considered. It is assumed that the involution has a single fixed point O and for the family of vector fields the point O is a hyperbolic saddle with nonzero saddle value, the separatrices of which, for zero parameter values, go to two saddle-nodes symmetric with respect to I, forming a polycycle homeomorphic to the figure eight. For generic families in the cases of positive and negative saddle values, bifurcation diagrams are obtained, that is, it is fulfiled a partition of a neighborhood of zero on the parameter plane into classes of topological equivalence of vector fields in a neighborhood of a polycycle.*

Keywords: *planar vector field, saddle, saddle-node, separatrix loop, bifurcation, closed trajectory*

For citation: *Roytenberg V. Sh. On bifurcations of separatrix contours of dynamical systems with involutive symmetry // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. : Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2024. Iss. 1 (336). P. 11–19. DOI: 10.53598/2410-3225-2024-1-336-11-19*

Бифуркации положений равновесия и периодических траекторий гладких динамических систем с симметрией как двумерных, так и многомерных изучаются уже довольно долго (см., например, [1–5]). Некоторые бифуркации сепаратрисных контуров двумерных систем с симметрией рассмотрены в работах [6–9]. Особый интерес представляет описание бифуркации контуров, являющихся аттракторами. Одна из таких бифуркаций рассмотрена в настоящей работе.

Пусть C^∞ – диффеоморфизм $I : M \to M$ открытого подмножества M плоскости $\mathbf{R}^2$ является инволюцией, то есть $I^2 = I \circ I = \mathrm{id}_M$ – тождественное отображение. Будем предполагать, что инволюция I имеет единственную неподвижную точку O. Основной пример такой инволюции – центральная симметрия $\mathbf{R}^2 \ni z \mapsto -z \in \mathbf{R}^2$.

Рассмотрим семейство векторных полей $X_\varepsilon(z) = P_1(z,\varepsilon)\partial/\partial z_1 + P_2(z,\varepsilon)\partial/\partial z_2$, где P_1 и P_2 C^r-гладкие функции ($r \ge 3$) точки $z = (z_1, z_2) \in M$ и двумерного параметра ε, меняющегося в окрестности E^0 нуля в $\mathbf{R}^2$, инвариантных относительно инволюции I, то есть таких, что $dI(X_\varepsilon(z)) \equiv X_\varepsilon(I(z))$.

Предположим, что векторное поле X_0 удовлетворяет следующим условиям.

Условия 1. Точка O – седло с собственными значениями матрицы линейной части поля в этой точке $\lambda_1^0 > 0$ и $\lambda_2^0 < 0$. Две симметричные точки O_0^+ и $O_0^- = I(O_0^+)$ – седло-узлы с собственными значениями матрицы линейной части поля в этой точке $\lambda_1^+ = 0$ и $\lambda_2^+ < 0$.

Условия 2. Выходящая сепаратриса L_{0+}^{out} (соотв. L_{0-}^{out}) седла O ω-предельна к седло-узлу O_0^+ (соотв. O_0^-), но не является его входящей сепаратрисой. Выходящая сепаратриса седло-узла O_0^+ (соотв. O_0^-) совпадает с входящей сепаратрисой L_{0+}^{in} (соотв. L_{0-}^{in}) седла O.

Пусть $\Gamma^\pm := L_{0\pm}^{\mathrm{out}} \cup L_{0\pm}^{\mathrm{in}} \cup \{O, O_0^\pm\}$. Ясно, что $\Gamma^- = I(\Gamma^+)$, а полицикл $\Gamma := \Gamma^+ \cup \Gamma^-$ гомеоморфен «восьмерке» (рис. 1).

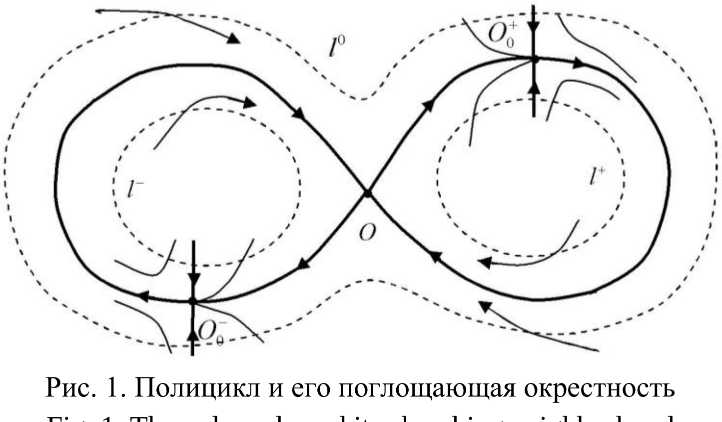

Рис. 1. Полицикл и его поглощающая окрестность
Fig. 1. The polycycle and its absorbing neighborhood

По теореме о центральном многообразии [10] для ε, принадлежащих некоторой окрестности $\mathrm{E}^1 \subset \mathrm{E}^0$ нуля, в окрестности точки O_0^+, не содержащей точки O, существует замена координат $z = \zeta(x, y, \varepsilon)$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\zeta \in C^{r-1}$, $k = 1, 2$, такая, что в координатах (x, y)

$$X_\varepsilon(z) = P(x,\varepsilon)\partial/\partial x + Q(x, y, \varepsilon)\partial/\partial y,$$

где

$$P(x,\varepsilon) = P(0,\varepsilon) + (a + r_1(x,\varepsilon))x^2\,,\ Q(x,y,\varepsilon) = (\lambda_0^+ + r_2(x,y,\varepsilon))y\,, \tag{1}$$
$$P(0,0) = 0\,,\ a > 0\,,\ r_1 \in C^1\,,\ r_1(0,0) = 0\,,\ r_2 \in C^1\,,\ r_2(0,0,0) = 0\,.$$

Выбрав достаточно малые число $c > 0$ и окрестность нуля $\mathrm{E}^2 \subset \mathrm{E}^1$, будем иметь
$$a + r_1(x,\varepsilon) > 0\,,\ \lambda_0^+ + r_2(x,y,\varepsilon) < 0\,, \text{если } (x,y) \in (-2c,2c)^2\,,\ \varepsilon \in \mathrm{E}^2\,. \tag{2}$$

Пусть $\tau_\varepsilon^\pm : (-c,c) \to M$ – отображения, задаваемые равенствами $\tau_\varepsilon^\pm(u) := \zeta(-c,u,\varepsilon)$. Без ограничения общности можно считать, что дуга $\tau_0^\pm(-c,0)$ принадлежит полуокрестности петли Γ^+, не содержащей сепаратрис седла O, не входящих в Γ^+. Седло-узел O_0^+ поля X_0 имеет координаты $x = y = 0$, а его выходящая сепаратриса задается условиями $y = 0$, $x > 0$. Поэтому сепаратриса L_{0+}^{in} трансверсально пересекает дугу $\tau_0^+(-c,c)$ в точке с параметром $y = 0$. Входящие сепаратрисы седло-узла O_0^+ в координатах (x,y) задаются условиями $x = 0$, $y > 0$ и $x = 0$, $y < 0$. Поскольку сепаратриса L_{0+}^{out} с ними не совпадает, то она входит в O_0^+ по направлению $y = 0$. Тогда c можно считать выбранным так, что L_{0+}^{out} пересекает дугу $\tau_0^-(-c,c)$.

Мы можем считать, что окрестность E^2 выбрана так, что для любого $\varepsilon \in \mathrm{E}^2$ в точке O будет седло поля X_ε с собственными значениями матрицы линейной части поля $\lambda_1(\varepsilon) > 0$, $\lambda_2(\varepsilon) < 0$, $\lambda_1(\cdot), \lambda_2(\cdot) \in C^{r-1}$ и инвариантными многообразиями, C^{r-1}-гладко зависящими от ε [10]. Если окрестность E^2 достаточно мала, то седло O имеет выходящую (входящую) сепаратрису $L_{\varepsilon+}^{\mathrm{out}}$ (соотв. $L_{\varepsilon+}^{\mathrm{in}}$), пересекающую дугу $\tau_\varepsilon^-(-c,c)$ (соотв. $\tau_\varepsilon^+(-c,c)$) в точке с параметром $y = \hat{y}_-(\varepsilon)$ (соотв. $y = \hat{y}_+(\varepsilon)$), где $\hat{y}_\pm(\cdot) \in C^{r-1}$, $\hat{y}_+(0) = 0$. Вследствие симметрии $L_{\varepsilon-}^{\mathrm{out}} := I(L_{\varepsilon+}^{\mathrm{out}})$ и $L_{\varepsilon-}^{\mathrm{in}} := I(L_{\varepsilon+}^{\mathrm{in}})$ также соответственно выходящая и входящая сепаратрисы седла O.

Теперь мы можем сформулировать

Условие 3. Производные $\partial P(0,0)/\partial\varepsilon$ и $\partial\hat{y}_+(0)/\partial\varepsilon$ линейно независимы.

Это условие не зависит от произвола в выборе координат (x,y) и числа c.

При выполнении условия 3 мы можем выбрать в некоторой окрестности нуля $\mathrm{E}^* \subset \mathrm{E}^2$ C^{r-1}-координаты $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ так, что для любого $\varepsilon \in \mathrm{E}^*$
$$P(0,\varepsilon) = \varepsilon_1\,,\ \hat{y}_+(\varepsilon) = \varepsilon_2\,. \tag{3}$$

Далее будем считать, что $\mathrm{E}^* = (-\delta^*,\delta^*)^2$ и $\varepsilon \equiv (\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, если $\varepsilon \in \mathrm{E}^*$.

Теорема. *Пусть семейство векторных полей* $\{X_\varepsilon\}$, $\varepsilon \in \mathrm{E}^0$, *удовлетворяет условиям* 1–3, *а седловая величина* $\sigma_0 := \lambda_1^0 + \lambda_2^0 \neq 0$. *Тогда существуют окрестность* U *полицикла* Γ, *граница* ∂U *которой состоит из простых замкнутых кривых* l^+, l^- *и* l^0 (*рис.* 1), *для которых* $l^- = I(l^+)$, $l^0 = I(l^0)$, *и окрестность* $\mathrm{E} := (-\delta,\delta)^2 \subset \mathrm{E}^*$ *нуля на плоскости параметров со следующими свойствами:*

В точках ∂U *траектории полей* X_ε, $\varepsilon \in \mathrm{E}$ *входят в* U.

В случае $\sigma_0 > 0$ *бифуркационная диаграмма семейства* $\{X_\varepsilon\big|_U\}$, $\varepsilon \in \mathrm{E}$, *представляет собой разбиение области параметров* E *на множества* (*рис.* 2) $\{(0,0)\}$, B_j, E_j, $j = 1,2,....6$, *где* $\mathrm{B}_i = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = b_i(\varepsilon_1)\}$, $b_i \in C^1(0,\delta),(-\delta,\delta))$, $b_i(+0) = b_i'(+0) = 0$,

$i = 1, 2, 3$, $B_4 = \{0\} \times (0, \delta)$, $B_5 = (-\delta, 0) \times \{0\}$, $B_6 = \{0\} \times (-\delta, 0)$, E_j *– связная компонента* $E \setminus \bigcup_{j=0}^{6} B_j$, *в границу которой входят* B_j *и* B_{j+1} *(здесь* $B_7 := B_1$*).*

В случае $\sigma_0 < 0$ *бифуркационная диаграмма семейства* $\{X_\varepsilon|_U\}$, $\varepsilon \in E$, *представляет собой разбиение области параметров* E *на множества (рис. 3)* $\{(0,0)\}$, B_j, E_j, $j = 1, 2, 3, 4$, *где* $B_1 = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = b(\varepsilon_1)\}$, $b \in C^1(0, \delta), (-\delta, \delta))$, $b(+0) = b'(+0) = 0$, $B_2 = \{0\} \times (0, \delta)$, $B_3 = (-\delta, 0) \times \{0\}$, $B_4 = \{0\} \times (-\delta, 0)$, E_j *– связная компонента* $(-\delta, \delta)^2 \setminus \bigcup_{j=0}^{4} B_j$, *в границу которой входят* B_j *и* B_{j+1} *(здесь* $B_5 := B_1$*).*

В обоих случаях векторные поля X_ε, $\varepsilon \in E_j$, *грубые в* U, *векторные поля* X_ε, $\varepsilon \in B_j$, *первой степени негрубости в* U, *а схемы фазовых портретов векторных полей* X_ε, $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$, *имеют вид, изображенный на рисунке 4 в случае* $\sigma_0 < 0$ *и на рисунке 5 в случае* $\sigma_0 > 0$.

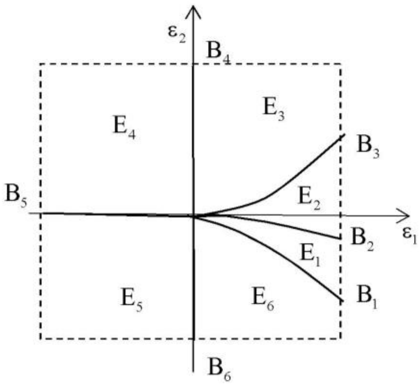

Рис. 2. Бифуркационная диаграмма в случае $\sigma_0 > 0$

Fig. 2. Bifurcation diagram in the case $\sigma_0 > 0$

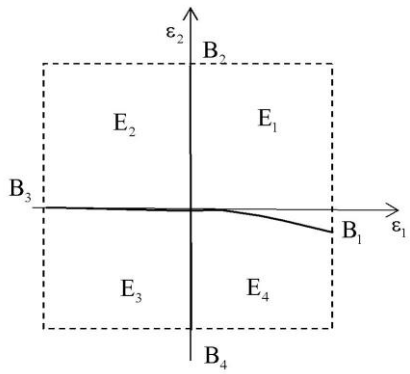

Рис. 3. Бифуркационная диаграмма в случае $\sigma_0 < 0$

Fig. 3. Bifurcation diagram in the case $\sigma_0 < 0$

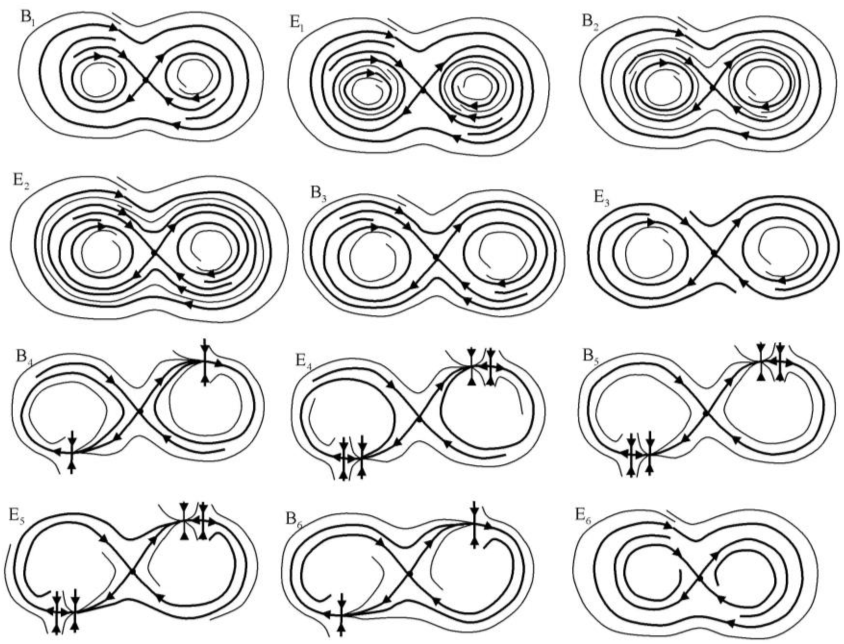

Рис. 4. Бифуркации фазовых портретов в случае $\sigma_0 > 0$

Fig. 4. Bifurcations of phase portraits in the case $\sigma_0 > 0$

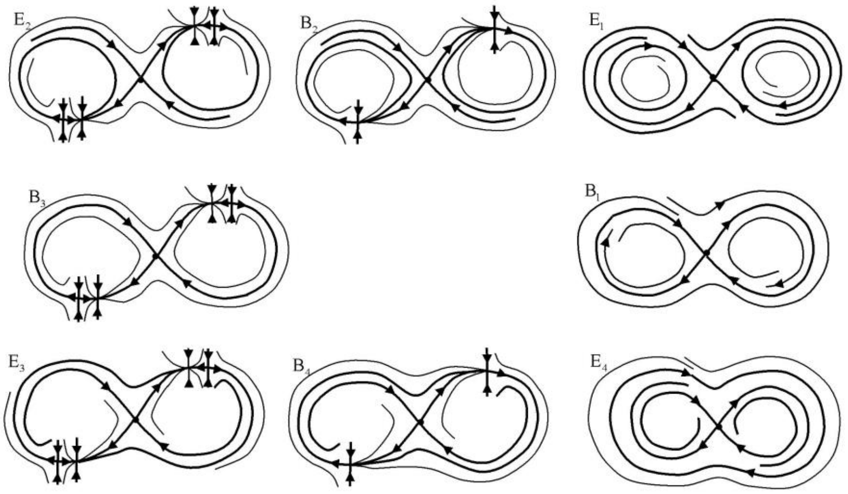

Рис. 5. Бифуркации фазовых портретов в случае $\sigma_0 < 0$

Fig. 5. Bifurcations of phase portraits in the case $\sigma_0 < 0$

Доказательство. Ограничимся рассмотрением более сложного случая $\sigma_0 > 0$. Из [11, п. 13.8], (3) и равенства $\lambda_1(0) + \lambda_2(0) = \sigma_0$ следует, что при достаточно малых $u_1 \in (0,c)$ и $\delta_1 \in (0,\delta^*)$ определено отображение $I(\tau_\varepsilon^-(\hat{y}_-(\varepsilon)+u)) \mapsto \tau_\varepsilon^+(\psi(u,\varepsilon))$, $u \in (0,u_1)$ по траекториям поля $-X_\varepsilon$, $\varepsilon \in (-\delta_1,\delta_1)^2$, где

$$\psi(u,\varepsilon) = \varepsilon_2 + l(\varepsilon)u^{\gamma(\varepsilon)} + q(u,\varepsilon),\ \gamma(\varepsilon) = -\lambda_1(\varepsilon)/\lambda_2(\varepsilon) \ge \gamma_0 > 1,\ l(\cdot) \in C^1,\ l(\varepsilon) \ge l_0 > 0, \quad (4)$$

$$|\partial^i q(u,\varepsilon)/\partial u^i| \le u^{\gamma(\varepsilon)-i+\alpha},\ |\partial q(u,\varepsilon)/\partial \varepsilon_j| \le u^{\gamma(\varepsilon)+\alpha} \text{ при } 0<\alpha<1,\ i=0,1,2,\ j=1,2. \quad (5)$$

Из (1)–(3) следует, что в области $(-2c,2c)^2$ при $\varepsilon \in (0,\delta^*) \times (-\delta^*,\delta^*)$ определено уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y,\varepsilon)}{P(x,\varepsilon)},$$

а его решение $y = Y(x,u,\varepsilon)$, удовлетворяющее начальному условию $Y(-c,u,\varepsilon) = u$, определено на интервале $(-2c,2c)$. Функция $\varphi(u,\varepsilon) = Y(c,u,\varepsilon)$ задает отображение $\tau_\varepsilon^-(u) \mapsto \tau_\varepsilon^+(\varphi(u,\varepsilon))$ дуги $\tau_\varepsilon^-(-c,c)$ в дугу $\tau_\varepsilon^+(-c,c)$ по траекториям поля X_ε, $\varepsilon \in (0,\delta^*) \times (-\delta^*,\delta^*)$, при этом

$$\varphi(0,\varepsilon) \equiv 0. \quad (6)$$

Выберем числа k_L, k_R, удовлетворяющие неравенствам

$$0 < k_L < -\pi\lambda_+^0/\sqrt{a} < k_R, \quad k_R(\gamma(0)-2) < k_L(\gamma(0)-1). \quad (7)$$

Лемма 1 [12]. *Существуют такие числа* $\delta_2 \in (0,\delta_1)$, $k > 0$, k_-, k_+, $k_L < k_- < k_+ < k_R$, *что для любых* $u \in (-c,c)$ *и* $\varepsilon \in (0,\delta_2) \times (-\delta_2,\delta_2)$

$$\exp(-k_+/\sqrt{\varepsilon_1}) \le \varphi'_u(u,\varepsilon) \le \exp(-k_-/\sqrt{\varepsilon_1}), \quad (8)$$

$$|\varphi''_{uu}(u,\varepsilon)| \le \exp(-k_-/\sqrt{\varepsilon_1}), \quad (9)$$

$$|\varphi'_{\varepsilon_i}(u,\varepsilon)| \le \exp(-k/\sqrt{\varepsilon_1}),\ i=1,2. \quad (10)$$

Ввиду (6), (8) и (10) функцию φ можно продолжить до C^1-функции $\bar{\varphi}$ на $(-c,c) \times (-\delta_2,\delta_2)^2$, положив $\bar{\varphi}(u,\varepsilon) = 0$ при $u \in (-c,c)$, $\varepsilon \in (-\delta_2,0] \times (-\delta_2,\delta_2)$. Пусть

$F(\varepsilon) := \varepsilon_2 - \bar{\varphi}(\hat{y}_-(\varepsilon),\, \varepsilon)$. Так как $F'_{\varepsilon_2}(\varepsilon) = 1$, $F'_{\varepsilon_1}(\varepsilon) = 0$, то найдется такое $\delta_3 \in (0, \delta_2]$, что для любого $\varepsilon_1 \in (-\delta_3, \delta_3)$ уравнение $F(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$ имеет в интервале $(-\delta_3, \delta_3)$ единственное решение $\varepsilon_2 = b_2(\varepsilon_1)$, где $b_2(\cdot) \in C^1$, $b_2(0) = 0$, $b_2'(0) = 0$. При $\varepsilon \in (-\delta_3, \delta_3)^2$ сепаратриса $L^{\text{out}}_{\varepsilon+}$ совпадает с сепаратрисой $L^{\text{in}}_{\varepsilon+}$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon_2 - \varphi(\hat{y}_-(\varepsilon),\, \varepsilon) = 0$, то есть, если $\varepsilon_2 = b_2(\varepsilon_1)$, $\varepsilon_1 \in (0, \delta_3)$.

Пусть u_2 – наименьшее из чисел u_1 и $c - \max\limits_{\varepsilon \in [-\delta_2, \delta_2]^2} \hat{y}_-(\varepsilon)$. Функция $d(u, \varepsilon) := \psi(u, \varepsilon) - \varphi(\hat{y}_-(\varepsilon) + u, \varepsilon)$ определена для всех $u \in (0, u_2)$, $\varepsilon \in (0, \delta_3) \times (-\delta_3, \delta_3)$.

Обозначим $\psi^{-1}(\cdot, \varepsilon)$ функцию, обратную к функции $\psi(\cdot, \varepsilon)$. Функция $f(u, \varepsilon) := \psi^{-1}(\varphi(\hat{y}_-(\varepsilon) + u, \varepsilon), \varepsilon)$, $u \in (0, u_2)$, $\varepsilon \in (0, \delta_3) \times (-\delta_3, \delta_3)$, задает отображение соответствия $\tau^-_\varepsilon(\hat{y}_-(\varepsilon) + u) \mapsto I(\tau^-_\varepsilon(f(u,\, \varepsilon)))$ по траекториям поля X_ε, $\varepsilon \in (0, \delta_3) \times (-\delta_3, \delta_3)$. Функция $\Pi(\cdot, \varepsilon) := f(f(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ – функция последования по траекториям поля X_ε. Для нее $\Pi'_u(u, \varepsilon) > 0$. Нетрудно проверить, что справедливы следующие утверждения:

$$\Pi(u_*, \varepsilon) = u_* \Leftrightarrow f(u_*, \varepsilon) = u_* \Leftrightarrow d(u_*, \varepsilon) = 0; \tag{11}$$

$$\Pi(u_*, \varepsilon) = u_*,\ \Pi'_u(u_*, \varepsilon) < 1\ (>1) \Leftrightarrow d(u_*, \varepsilon) = 0,\ d'(u_*, \varepsilon) > 0\ (<0); \tag{12}$$

$$\Pi(u_*, \varepsilon) = u_*,\ \Pi'_u(u_*, \varepsilon) = 1,\ \Pi''_{uu}(u_*, \varepsilon) \neq 0 \Leftrightarrow d(u_*, \varepsilon) = d'_u(u_*, \varepsilon) = 0,\, d''_{uu}(u_*, \varepsilon) \neq 0. \tag{13}$$

Ввиду (4), (5), (8) и (10) существуют такие $\bar{u} \in (0, u_2)$ и $\delta_4 \in (0, \delta_3]$, что

$$d'_{\varepsilon_2}(u, \varepsilon) > 0 \text{ при всех } u \in (0, \bar{u}],\ \varepsilon \in (0, \delta_4) \times (-\delta_4, \delta_4). \tag{14}$$

Пусть $\bar{\bar{u}} \in (0, \bar{u})$. Вследствие (4), (5), (6) и (8) найдется такое $\delta_5 \in (0, \delta_4]$, что

$$d(u, \varepsilon) > 0 \text{ при всех } u \in [\bar{\bar{u}}, \bar{u}],\ \varepsilon \in (0, \delta_5) \times (-\delta_5, \delta_5). \tag{15}$$

Обозначим

$$u_L(\varepsilon) := \exp\left(-\frac{k_R}{(\gamma(\varepsilon) - 1)\sqrt{\varepsilon_1}}\right),\ u_R(\varepsilon) := \exp\left(-\frac{k_L}{(\gamma(\varepsilon) - 1)\sqrt{\varepsilon_1}}\right). \tag{16}$$

Можно считать, что δ_5 выбрано столь малым, что при всех $\varepsilon \in (0, \delta_5) \times (-\delta_5, \delta_5)$ $u_R(\varepsilon) < \bar{\bar{u}}$.

Из (4)–(10) и (16) следует

Лемма 2. *Число $\delta \in (0, \delta_5]$ можно выбрать так, что для любого $\varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, \delta)$*

$$d'_u(u, \varepsilon) < 0,\ \textit{если}\ \ u \in (0, u_L(\varepsilon)], \tag{17}$$

$$d'_u(u, \varepsilon) > 0\ \textit{если}\ u \in [u_R(\varepsilon), \bar{u}], \tag{18}$$

$$d''_{uu}(u, \varepsilon) > 0\ \textit{если}\ u \in [u_L(\varepsilon), u_R(\varepsilon)], \tag{19}$$

$$d'_{\varepsilon_2}(u, \varepsilon) \geq 1/2\ \textit{если}\ u \in (0, u_R(\varepsilon)]. \tag{20}$$

Из (17)–(19) получаем, что для любого $\varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, \delta)$ функция $d(\cdot, \varepsilon)$ имеет точку минимума $u_0(\varepsilon) \in (u_L(\varepsilon), u_R(\varepsilon))$, где $u_0(\cdot) \in C^1$, и

$$\operatorname{sgn} d'_u(u, \varepsilon) = \operatorname{sgn}(u - u_0(\varepsilon)). \tag{21}$$

Из (20) и (21) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} d(u_0(\varepsilon), \varepsilon) = d'_{\varepsilon_2}(u, \varepsilon)\Big|_{u=u_0(\varepsilon)} \geq \frac{1}{2} \text{ для всех } \varepsilon \in (0,\delta)\times(-\delta,\delta). \qquad (22)$$

Из (16), (4)–(6) и (8), считая δ выбранным достаточно малым, получаем, что

$$d(u_0(\varepsilon), \varepsilon)\Big|_{\varepsilon_2=\varepsilon_1} > 0 \text{ для всех } \varepsilon \in (0,\delta)\times(-\delta,\delta). \qquad (23)$$

Так как $d(+0,\varepsilon) = \varepsilon_2 - \varphi(\hat{y}_-(\varepsilon), \varepsilon)$, то ввиду (8) и (10) можно считать δ столь малым, что $d'_{\varepsilon_2}(+0,\varepsilon) > 0$. Поэтому

$$\operatorname{sgn} d(+0,\varepsilon) = \operatorname{sgn}(\varepsilon_2 - b_2(\varepsilon_1)) \text{ для всех } \varepsilon \in (0,\delta)\times(-\delta,\delta). \qquad (24)$$

Вследствие (24) и (17) $d(u_0(\varepsilon), \varepsilon)\Big|_{\varepsilon_2=b_2(\varepsilon_1)} < 0$. Отсюда и из (22) и (23), используя теорему о промежуточных значениях непрерывной функции и теорему о неявной функции, получаем, что $\forall \varepsilon_1 \in (0,\delta)$ $\exists b_3(\varepsilon_1) \in (b_2(\varepsilon_1), \varepsilon_1)$

$$\operatorname{sgn} d(u_0(\varepsilon), \varepsilon) = \operatorname{sgn}(\varepsilon_2 - b_3(\varepsilon_1)) \text{ для всех } \varepsilon \in (0,\delta)\times(-\delta,\delta), \qquad (25)$$

при этом $b_2(\cdot) \in C^1$. Так как

$$b'_3(\varepsilon_1) = -\frac{d'_{\varepsilon_1}(u,\varepsilon)}{d'_{\varepsilon_2}(u,\varepsilon)}\Bigg|_{u = u_0(\varepsilon),\, \varepsilon_2 = b_3(\varepsilon_1)},$$

$u_0(\varepsilon) \in (u_L(\varepsilon), u_R(\varepsilon))$, то из (16), (4), (5), (10) и (20) следует, что и $b'_3(+0) = 0$.

Вследствие (15), (21), (24), (25) и (17)–(19) функция $d(u,\varepsilon)$, $u \in (0, \overline{u}]$, при $\varepsilon_1 \in (0,\delta)$, $-\delta < \varepsilon_2 \leq b_2(\varepsilon_1)$ имеет единственный нуль $u_+(\varepsilon)$, а $d'_u(u_+(\varepsilon), \varepsilon) > 0$; при $\varepsilon_1 \in (0,\delta)$, $b_2(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < b_3(\varepsilon_1)$ имеет ровно два нуля $u_-(\varepsilon) \in (0, u_L(\varepsilon))$, в котором $d'_u(u_-(\varepsilon), \varepsilon) < 0$, и $u_+(\varepsilon) \in (u_R(\varepsilon), u)$, в котором $d'_u(u_+(\varepsilon), \varepsilon) > 0$; при $\varepsilon_1 \in (0,\delta)$, $\varepsilon_2 = b_3(\varepsilon_1)$ имеет единственный (двукратный) нуль; при $\varepsilon_1 \in (0,\delta)$, $b_3(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \delta$ не имеет нулей.

Ввиду (11)–(13) получаем, что дугу $\tau^-_\varepsilon(\hat{y}_-(\varepsilon), \hat{y}_-(\varepsilon) + \overline{u}]$, $\varepsilon \in (0,\delta)\times(-\delta,\delta)$, пересекают следующие замкнутые траектории поля X_ε: при $-\delta < \varepsilon_2 \leq b_2(\varepsilon_1)$ – устойчивая гиперболическая замкнутая траектория, при $b_2(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < b_3(\varepsilon_1)$ – устойчивая и неустойчивая гиперболические замкнутые траектории, при $\varepsilon_2 = b_3(\varepsilon_1)$ – двойной цикл.

При достаточно малых $\underline{u} > \underline{\underline{u}} > 0$ и $\delta_+ > 0$ определено отображение

$$\tau^-_\varepsilon(\hat{y}_-(\varepsilon) + u)) \mapsto \tau^+_\varepsilon(\psi_+(u, \varepsilon)), \ u \in [-\underline{u}, 0)$$

по траекториям поля $-X_\varepsilon$, $\varepsilon \in (-\delta_+, \delta_+)^2$, для которого имеет место представление (4)–(5), конечно, с другими функциями l и q, и функция $d_+(u,\varepsilon) := \psi_+(u,\varepsilon) - \varphi(\hat{y}_-(\varepsilon) + u, \varepsilon)$, нули u_* которой определяют точки $\tau^-_\varepsilon(\hat{y}_-(\varepsilon) + u_*))$, через которые проходят замкнутые траектории поля X_ε, при этом

$$d_+(u,\varepsilon) < 0 \text{ для всех } u \in [-\underline{u}, -\underline{\underline{u}}]. \qquad (26)$$

Как и выше доказывается, что δ можно считать выбранным так, что $\delta \in (0,\delta_+)$ и существует C^1-функция $b_1 : (0,\delta) \to (-\delta,\delta)$ со следующими свойствами: $\forall \varepsilon_1 \in (0,\delta)$ $b_1(\varepsilon_1) < b_2(\varepsilon_1)$, дугу $\tau^-_\varepsilon[\hat{y}_-(\varepsilon) - \underline{u}, \hat{y}_-(\varepsilon))$, $(I(\tau^-_\varepsilon[\hat{y}_-(\varepsilon) - \underline{u}, \hat{y}_-(\varepsilon))))$ $\varepsilon \in (0,\delta)\times(-\delta,\delta)$, пересекают следующие замкнутые траектории поля X_ε: при $\varepsilon_2 = b_1(\varepsilon_1)$ – двойной цикл, при $b_1(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < b_2(\varepsilon_1)$ – устойчивая и неустойчивая гиперболические замкнутые траектории, при $b_2(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \delta$ – устойчивая гиперболическая замкнутая траектория.

Пусть $u_c \in [-\underline{u}, -\underline{\underline{u}}]$, $u^c \in [\overline{\overline{u}}, \overline{u}]$. Аналогично [12] можно построить кусочно-гладкие замкнутые кривые l^0 и l^+, трансверсально пересекающие дугу $\tau_0^-(\hat{y}_-(0) - \underline{u}, \hat{y}_-(0) + \overline{u})$, соответственно, в точках $\tau_0^-(\hat{y}_-(0) + u^c))$ и $\tau_0^-(\hat{y}_-(0) + u_c))$, причем l^0, l^+ и $l^- := I(l^+)$ ограничивают окрестность U полицикла Г такую, что в $\overline{U}$ нет особых точек поля X_0, кроме O, а в точках $\partial U = l^0 \cup l^+ \cup l^-$ траектории X_0 трансверсальны гладким дугам ∂U и входят в U. Мы можем считать δ выбранным столь малым, что при $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$ траектории поля X_ε также трансверсальны гладким дугам ∂U и входят в U, дуга $\tau_\varepsilon^-(\hat{y}_-(\varepsilon) - \underline{\underline{u}}, \hat{y}_-(\varepsilon) + \overline{\overline{u}})$ содержится в U, а дуга $\tau_\varepsilon^-(\hat{y}_-(\varepsilon) - \underline{u}, \hat{y}_-(\varepsilon) + \overline{u})$ пересекается с l^0 и l^+.

Определим теперь множества B_j, E_j, $j = 1, 2, ...6$, как в формулировке теоремы.

При $\varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, \delta)$ любая замкнутая траектория поля $X_\varepsilon\big|_U$ пересекается с дугой $\tau_\varepsilon^-(\hat{y}_-(\varepsilon) - \underline{u}, \hat{y}_-(\varepsilon) + \overline{u})$. Ввиду (15) и (26) любая замкнутая траектория поля X_ε пересекающаяся с дугой $\tau_\varepsilon^-(\hat{y}_-(\varepsilon) - \underline{u}, \hat{y}_-(\varepsilon) + \overline{u})$, пересекается и с $\tau_\varepsilon^-(\hat{y}_-(\varepsilon) - \underline{\underline{u}}, \hat{y}_-(\varepsilon) + \overline{\overline{u}})$. Из доказанного выше следует, что фазовые портреты векторных полей $X_\varepsilon\big|_U$ при $\varepsilon \in \mathrm{E}_6$, $\varepsilon \in \mathrm{B}_1$, $\varepsilon \in \mathrm{E}_1$, $\varepsilon \in \mathrm{B}_2$, $\varepsilon \in \mathrm{E}_2$, $\varepsilon \in \mathrm{B}_3$, $\varepsilon \in \mathrm{E}_3$ имеют вид, описанный в теореме.

Ввиду (1) и (2) δ можно считать столь малым, что поле $X_\varepsilon\big|_U$ при $\varepsilon = 0$, $\varepsilon \in \mathrm{B}_4$ и $\varepsilon \in \mathrm{B}_6$ имеет единственную особую точку – седло-узел с координатами $x = y = 0$, а при $\varepsilon \in \mathrm{E}_4$, $\varepsilon \in \mathrm{B}_5$ и $\varepsilon \in \mathrm{E}_5$ имеет ровно две особые точки – гиперболические седло и узел, лежащие на дуге $\{z = \zeta(x, 0, \varepsilon),\ x \in (-c, c)\}$. Так как любая траектория поля $X_\varepsilon\big|_U$ пересекает дугу $\tau_\varepsilon^-(-c, c)$, то при рассматриваемых ε все траектории поля ω-предельны к особым точкам, и потому замкнутых траекторий у поля нет и фазовые портреты векторных полей $X_\varepsilon\big|_U$ имеют вид, описанный в теореме.

Примечания

1. Takens F. Singularities of vector fields // Publ. Math. IHES. 1974. Vol. 43. P. 47–100.
2. Жолондек Х. О версальности одного семейства симметричных векторных полей на плоскости // Математический сборник. 1983. Т. 120, № 4. С. 473–499.
3. Golubitsky M., Shaeffer D., Stewart I. Singularities and Groups in Bifurcation Theory. Springer-Verlag, 1988. 533 c.
4. Николаев Е. В. Бифуркации предельных циклов дифференциальных уравнений, допускающих инволютивную симметрию // Математический сборник. 1995. Т. 186, № 4. С. 143–160.
5. Шноль Э. Э. Правильные многогранники и бифуркации симметричных положений равновесия обыкновенных дифференциальных уравнений // Математический сборник. 2000. Т. 191, № 8. С. 141–157.
6. Ройтенберг В. Ш. Бифуркации полицикла, образованного двумя петлями сепаратрис негрубого седла динамической системы с центральной симметрией // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. : Математика. Механика. Физика. 2021. Т. 13, № 2. С. 39–46. DOI: 10.14529/mmph210305
7. Ройтенберг В. Ш. Бифуркации полицикла, образованного сепаратрисами седла с нулевой седловой величиной динамической системы с центральной симметрией // Математиче-

ские заметки СВФУ. 2023. Т. 30, № 3. С. 67–77. DOI: 10.25587/SVFU.2023.86.26.007

8. Ройтенберг В. Ш. О бифуркациях сепаратрисных контуров динамических систем, инвариантных относительно конечной группы вращений // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. : Естественно-математические и технические науки. 2023. Вып. 2 (321). С. 11–18. DOI: 10.53598/2410-3225-2023-2-321-11-18

9. Ройтенберг В. Ш. О некоторых нелокальных бифуркациях динамических систем с симметрией // Математика и естественные науки. Теория и практика : Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 18. Ярославль : Изд-во ЯГТУ. 2023. С. 25–34.

10. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 1 / Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа. Москва ; Ижевск : ИКИ, 2004. 416 с.

11. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2 / Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа. Москва ; Ижевск : ИКИ, 2009. 548 с.

12. Ройтенберг В. Ш. О бифуркациях контура из сепаратрис седла и седло-узла. Ярославль : Ярославский политехнический институт,1988. 39 с. Деп. в ВИНИТИ, № 2555-В88.

References

1. Takens F. Singularities of vector fields // Publ. Math. IHES. 1974. Vol. 43. P. 47–100.

2. Zholondek H. On the versality of one family of symmetric vector fields on the plane // Mathematical Collection. 1983. Vol. 120, No. 4. P. 473–499.

3. Golubitsky M., Shaeffer D., Stewart I. Singularities and Groups in Bifurcation Theory. Springer-Verlag, 1988. 533 p.

4. Nikolaev E. V. Bifurcations of limit cycles of differential equations admitting involutive symmetry // Mathematical Collection. 1995. Vol. 186, No. 4. P. 143–160.

5. Shnol E. E. Regular polyhedra and bifurcations of symmetric equilibria of ordinary differential equations // Mathematical Collection. 2000. Vol. 191, No. 8. P. 141–157.

6. Roytenberg V. Sh. Bifurcations of a polycycle formed by two separatrix loops of a non-rough saddle of a dynamical system with central symmetry // Bulletin of the South Ural State University. Ser. : Mathematics. Mechanics. Physics. 2021. Vol. 13, No. 3. P. 39–46. DOI: 10.14529/mmph210305

7. Roytenberg V. Sh. Bifurcations of a polycycle formed by separatrices of a saddle with zero saddle value of a dynamical system with central symmetry // Mathematical Notes of NEFU. 2023. Vol. 30, No. 3. P. 67–77. DOI: 10.25587/SVFU.2023.86.26.007

8. Roytenberg V. Sh. On bifurcations of separatrix contours of dynamical systems invariant under a finite group of rotations // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. : Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2023. Iss. 2 (321). P. 11–18. DOI: 10.53598/2410-3225-2023-2-321-11-18

9. Roytenberg V. Sh. On some nonlocal bifurcations of dynamical systems with symmetry // Mathematics and Natural Sciences. Theory and Practice : coll. of scientific works. Yaroslavl : YaSTU Publishing House, 2023. Iss. 18. P. 25–34.

10. Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. Part 1 // L. P. Shilnikov, A. L. Shilnikov, D. V. Turaev, L. Chua. Moscow ; Izhevsk : IKI, 2004. 416 p.

11. Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. Part 2 // L. P. Shilnikov, A. L. Shilnikov, D. V. Turaev, L. Chua. Moscow ; Izhevsk : IKI, 2009. 548 p.

12. On bifurcations of a contour formed by separatrices of a saddle and saddle-node. Yaroslavl : Yaroslavl Polytechnic Institute, 1988. 39 p. Dep. in VINITI. No. 2555-B88.

Статья поступила в редакцию 14.01.2024; *одобрена после рецензирования 29.01.2024*; *принята к публикации 30.01.2024*.

The article was submitted 14.01.2024; *approved after reviewing 29.01.2024*; *accepted for publication 30.01.2024*.