Научная статья
УДК 517.925.42
ББК 22.161.6
У 95
DOI: 10.53598/2410-3225-2024-1-336-20-25

Кубическая система с пятью центрами, три из которых лежат на одной прямой, не имеет предельных циклов

(*Рецензирована*)

Адам Дамирович Ушхо[1], Дамир Салихович Ушхо[2]

[1–2] *Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия*
[1] *a.ushkho@adygnet.ru*
[2] *damirubych@mail.ru*

Аннотация. *В данной работе получены достаточные условия отсутствия предельных циклов у кубической дифференциальной системы второго порядка, имеющей пять центров.*

Ключевые слова: *автономная динамическая система на плоскости, кубическая система, состояние равновесия, центр, предельный цикл, индекс Пуанкаре, критерий Бендиксона*

Для цитирования: *Ушхо А. Д., Ушхо Д. С. Кубическая система с пятью центрами, три из которых лежат на одной прямой, не имеет предельных циклов // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. : Естественно-математические и технические науки. 2024. Вып. 1 (336). С. 20–25. DOI: 10.53598/2410-3225-2024-1-336-20-25*

Original Research Paper

A cubic system with five centers, three of which located on one straight line, has no limit cycles

Adam D. Ushkho[1], Damir S. Ushkho[2]

[1] *Adyghe State University, Maykop, Russia*
[1] *a.ushkho@adygnet.ru*
[2] *damirubych@mail.ru*

Abstract. *In this paper the sufficient conditions for the lacking of limit cycles of a second order cubic differential system having five centers are obtained.*

Keywords: *autonomous dynamical system on a plane, cubic system, equilibrium state, center, limit cycle, Poincare index, Bendixon criterion*

For citation: *Ushkho A. D., Ushkho D. S. A cubic system with five centers, three of which located on one straight line, has no limit cycles // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. : Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2024. Iss. 1 (336). P. 20–25. DOI: 10.53598/2410-3225-2024-1-336-20-25*

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{n} a_{ij} x^i y^j \equiv P_n(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{n} b_{ij} x^i y^j \equiv Q_n(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in R, (P_n, Q_n) = 1$.

Впервые в процессе исследования поведения траекторий системы (1) в случае $n = 2$ в работе [1] установлено, что эта система не имеет предельных циклов, если среди ее состояний равновесия имеется хотя бы один центр. В этой связи Н. П. Еругиным в монографии [2] был поставлен вопрос о существовании полиномиальных систем вида (1), имеющих состояние равновесия типа «центр» и предельный цикл. Задаче обнаружения полиномиальных векторных полей (1), допускающих сосуществование предельных циклов и состояний равновесия типа «центр», посвящены статьи [3–6]. Заслуга автора заметки [4] состоит в том, что он впервые построил систему (1) при $n=3$, имеющую центр и предельный цикл. В работе [5] доказано, что система с кубическими однородными нелинейностями может иметь два центра и предельный цикл. Особо следует отметить, что данный предельный цикл является эллипсом.

В связи с работами [4, 5] естественным образом возникла задача: чему равно наибольшее число центров системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{3} a_{ij} x^i y^j \equiv P_3(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{3} b_{ij} x^i y^j \equiv Q_3(x,y), \end{cases} \tag{2}$$

при котором она имеет изолированные периодические решения.

Так, в заметке [6] построена система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y-(2+\varepsilon)xy-5x^2y+(6+\varepsilon)y^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x-3x^2+12y^2+x^3+6xy^2, \end{cases} \tag{3}$$

где ε – сколь угодно малое положительное число, имеющая простой устойчивый фокус $(1,1)$, окруженный неустойчивым предельным циклом, и неустойчивый простой фокус $(-1,1)$, окруженный устойчивым предельным циклом. Система (3) при этом имеет три центра: $(-1,0)$, $(0,0)$, $(4,0)$ с чисто мнимыми корнями характеристического уравнения.

Известно [7], что система (2) также может иметь центры с кратным нулевым характеристическим числом. Ответом на вопрос: существует ли такая система с предельным циклом, – является приведенная в заметке [6] система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y-\dfrac{57}{42}y^2-\dfrac{1}{7}x^2y+\dfrac{15}{42}y^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x^3-\left(\dfrac{4}{21}+\varepsilon\right)xy+\left(\dfrac{11}{63}+\dfrac{\varepsilon}{3}\right)xy^2, \end{cases} \tag{4}$$

где ε – достаточно малое по модулю отрицательное число, которая имеет центр $(0,0)$ с кратным нулевым характеристическим числом и центр $(0,1)$ с чисто мнимыми корнями характеристического уравнения и, по крайней мере, два предельных цикла, один из которых окружает простой устойчивый фокус $(1,3)$, а второй – простой неустойчивый фокус $(-1,3)$.

Нам не известны примеры систем вида (2), имеющие не менее четырех центров и предельные циклы. В соответствии с работой [8] система (2) имеет не более пяти центров, и в случае максимального числа центров их характеристические числа чисто мнимые.

Теорема. *Если система* (2) *имеет пять центров, три из которых лежат на одной прямой, то* (2) *не имеет предельных циклов.*

Доказательство. Нами рассматривается только случай $P'_{3x}(x,y)+Q'_{3y}(x,y)\not\equiv 0$, так как в противном случае система (2) консервативна и не имеет изолированных периодических решений [9]. Пусть три центра системы (2) принадлежат прямой l. Тогда, согласно [10], l – изоклина этой системы, то есть $\left(\dfrac{Q_3(x,y)}{P_3(x,y)}\right)_{(x,y)\in l} \equiv m,\ m - \text{const}$.

Рассмотрим общий случай, когда l не является главной изоклиной системы (2).

Следуя работе [10], применим к системе (2) преобразование

$$\begin{cases} x = \bar{x} + \bar{y}, \\ y = m\bar{y}. \end{cases} \tag{5}$$

В результате имеем систему

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{dt} = (\bar{y} - k\bar{x})P_2(\bar{x}, \bar{y}), \\ \dfrac{d\bar{y}}{dt} = \bar{Q}_3(\bar{x}, \bar{y}), \end{cases} \tag{6}$$

где $\bar{Q}_3(0,0) = 0$.

В силу работы [10] прямая l переведена преобразованием (5) в изоклину бесконечности $\bar{l} : \bar{y} - k\bar{x} = 0$ (предполагается, что начало координат системы (2) предварительно перенесено в один из центров на прямой l). В результате преобразования

$$\begin{cases} \tilde{x} = \bar{x}, \\ \tilde{y} = \bar{y} - k\bar{x} \end{cases} \tag{7}$$

система (6) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{y}P_2(\tilde{x}, \tilde{y} + k\tilde{x}), \\ \dfrac{d\tilde{y}}{dt} = \bar{Q}_3(\tilde{x}, \tilde{y} + k\tilde{x}) - k\tilde{y}P_2(\tilde{x}, \tilde{y} + k\tilde{x}). \end{cases} \qquad 8)$$

Таким образом, в условиях теоремы, не сужая общности, будем рассматривать систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = yP_2(x, y) \equiv P_3(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q_3(x, y), \end{cases} \tag{9}$$

где $P'_{3x} + Q'_{3y} \equiv yM_1(x, y)$, $M_1(x, y)$ – линейная функция.

По условию три центра системы (9) расположены на прямой $y = 0$, поэтому, согласно известной теореме Пуанкаре [11], изоклина бесконечности $P_2(x, y) = 0$ пересекается с прямой $y = 0$ в двух точках (обозначим их W_1 и W_2) так, что один из центров C_2 расположен между точками W_1 и W_2, центр C_1 (C_3) лежит левее точки W_1 (правее точки W_2). Обозначим центры, расположенные на прямой $M_1(x, y) = 0$, C_4 и C_5. Изоклина бесконечности $P_2(x, y) = 0$ может быть эллипсом, либо параболой, либо гиперболой, либо парой прямых.

Рассуждения проведем в случае эллипса, так как во всех остальных случаях мы придем к одному и тому же выводу. Обратимся к рисунку 1.

Центры C_4 и C_5 могут быть расположены в одной полуплоскости или в разных полуплоскостях относительно прямой $y = 0$, но для определенности полагаем, что эти центры лежат в разных полуплоскостях. Если есть у системы (9) предельный цикл, то он непременно окружает состояние равновесия, индекс Пуанкаре которого равен +1, которое расположено на эллипсе $P_2(x,y)=0$. Кроме того, в силу критерия Бендиксона [9] предельный цикл пересекает кривую $P'_{3x}(x,y)+Q'_{3y}(x,y)=0$, которая распадается в нашем случае на прямую $y=0$ и прямую $M_1(x,y)=0$.

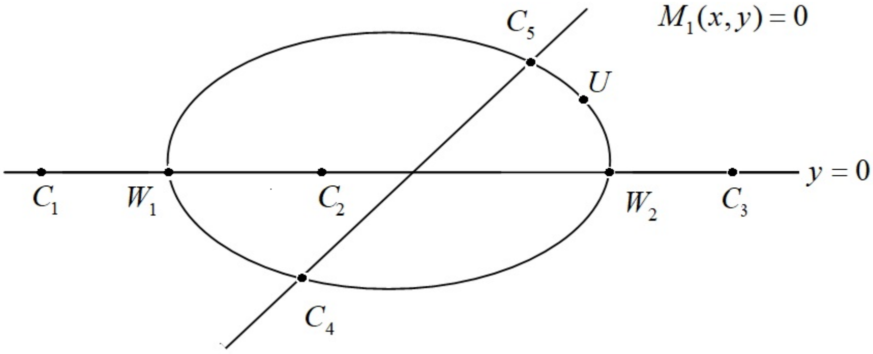

Рис. 1. Эллипс $P_2(x,y)=0$ пересекает изоклину бесконечности $y=0$ в точках W_1 и W_2. Прямая $M_1(x,y)=0$ и эллипс $P_2(x,y)=0$ пересекаются в точках C_4 и C_5

Fig. 1. The ellipse $P_2(x,y)=0$ intersect the isocline of infinity $y=0$ at the points W_1 and W_2. The straight line $M_1(x,y)=0$ and the ellipse $P_2(x,y)=0$ are intersected at the points C_4 and C_5

Ввиду того, что прямая $y=0$ не имеет контакта с траекториями системы (9), то предельный цикл этой системы, если он существует, пересекает прямую $M_1(x,y)=0$.

Предположим, что система (9) имеет предельный цикл, и он окружает антиседло U, то есть состояние равновесия типа «узел» или «фокус».

По определению индекса состояния равновесия [9, 12] при обходе цикла, окружающего точку U, в направлении против хода часовой стрелки функция $\dfrac{Q_3(x,y)}{P_3(x,y)}$ меняет свой знак с положительного на отрицательный при переходе через изоклину бесконечности $P_3(x,y)=0$.

Поэтому, принимая во внимание тот факт, что дивергенция векторного поля системы (9) во всех точках покоя, не являющихся центрами, отлична от нуля, приходим к выводу: топологическая структура простого узла (седла) не отличается от топологической структуры сложного узла (седла) [13].

Тем самым можно утверждать, что на эллипсе $P_2(x,y)=0$ между центром C_5 и антиседлом U расположено хотя бы одно седло.

Пусть между центром C_5 и антиседлом U расположено седло S. α – сепаратриса и ω – сепаратриса седла S, примыкающие к этому седлу, оставаясь внутри эллипса $P_2(x,y)=0$, пересекают прямую $M_1(x,y)=0$.

Следовательно, найдется траектория в гиперболическом секторе седла S, касающаяся прямой $M_1(x,y)=0$.

Наряду с этим внутри предельного цикла, окружающего антиседло U, найдется траектория, касающаяся прямой $M_1(x,y)=0$.

Таким образом, на прямой $M_1(x,y)=0$ сумма числа контактов и числа состояний равновесия системы (9) не меньше четырех, что противоречит теореме 6 [14].

Теорема доказана.

Замечание. *Если прямая* C_4C_5 *проходит через центр* C_2, *то*, *согласно* [10], *она является изоклиной системы* (9), *причем на изоклинах* C_4C_5 *и* $y=0$ *индуцированы различные направления. Отсутствие предельных циклов системы в данном случае очевидно.*

Примечания

1. Лукашевич Н. А. Интегральные кривые одного дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1965. Т. 1, № 1. С. 82–95.
2. Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск : Наука и техника, 1970. 279 с.
3. Борухов В. Т. Исследование качественного поведения траекторий одной системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 8, № 9. С. 1682–1683.
4. Долов М. В. О предельных циклах в случае центра // Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 8, № 9. С. 1691–1692.
5. Щеглова Н. Л. Исследование систем с однородными кубическими нелинейностями, имеющих фокус и центр // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29, № 2. С. 241–255.
6. Ушхо Д. С. О сосуществовании предельных циклов и особых точек типа «центр» // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31, № 1. С. 174–175.
7. Амелькин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П. Нелинейные колебания в системах второго порядка. Минск : Изд-во БГУ, 1982. 208 с.
8. Ушхо Д. С. О числе особых точек второй группы кубической системы // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29, № 2. С. 240–245.
9. Качественная теория динамических систем второго порядка / А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. Москва : Наука, 1966. 568 с.
10. Ушхо Д. С. Прямые изоклины и канонические формы полиномиальных дифференциальных систем на плоскости. Майкоп, 2007. 93 с.
11. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. Москва : Наука, 1967. 488 с.
12. Берлинский А. Н. О поведении интегральных кривых одного дифференциального уравнения // Известия высших учебных заведений. Математика. 1960. № 2 (15). С. 3–18.
13. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. Москва : Наука, 1976. 496 с.
14. Тлячев В. Б., Ушхо А. Д., Ушхо Д. С. Состояния равновесия и смежные вопросы теории плоских полиномиальных векторных полей // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2020. № 1. С. 30–54.

References

1. Lukashevich N. A. Integral curves of one differential equation // Differential equations. 1965. Vol. 1, No. 1. P. 82–95.
2. Erugin N. P. A book for reading on the general course of differential equations. Minsk : Science and Technology, 1970. 279 p.
3. Borukhov V. T. Qualitative behavior of trajectories of a differential-equations system // Differential Equations. 1972. Vol. 8, No. 9. P. 1682–1683.
4. Dolov M. V. On limit cycles in the case of a center // Differential Equations. 1972. Vol. 8, No. 9. P. 1691–1692.
5. Shcheglova N. L. Investigation of systems with homogeneous cubic nonlinearities that have a focus and a center // Differential Equations. 1993. Vol. 29, No. 2. P. 241–255.
6. Ushkho D. S. On the coexistence of limit cycles and singular points of “center” type // Differential Equations. 1995. Vol. 31, No. 1. P. 174–175.
7. Amelkin V. V., Lukashevich N. A., Sadovsky A. P. Nonlinear oscillations in second-order systems. Minsk : BSU Publishing House, 1982. 208 p.
8. Ushkho D. S. About a number of special points of the second group of cubic system // Differential Equations. 1993. Vol. 29, No. 2. P. 240–245.
9. Qualitative theory of second-order dynamical systems / A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon, A. G. Maier. New York : John Wiley and Sons, 1973. 568 p.
10. Ushkho D. S. Straight lines isoclines and canonical forms of polynomial differential systems on the plane. Maykop, 2007. 93 p.
11. Bifurcation theory of dynamical systems on the plane / A. A. Andronov, E. A. Leontovich,

I. I. Gordon, A. G. Mayer. Moscow : Nauka, 1967. 488 p.

12. Berlinsky A. N. On the behavior of integral curves of one differential equation // News of Higher Schools. Mathematics. 1960. No. 2 (15). P. 3–18.

13. Bautin N. N., Leontovich E. A. Methods and techniques of the qualitative study of dynamical systems on the plane. Moscow : Nauka, 1976. 496 p.

14. Tlyachev V. B., Ushkho A. D., Ushkho D. S. Equilibrium states and adjacent questions of the plane polynomial vector fields theory // Differential Equations and Control Processes. 2020. No. 1. P. 30–54.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Статья поступила в редакцию 11.12.2023; одобрена после рецензирования 28.12.2023; принята к публикации 29.12.2023.

The authors declare no conflicts of interests.

The article was submitted 11.12.2023; approved after reviewing 28.12.2023; accepted for publication 29.12.2023.