МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

Обзорная статья
УДК 517.938
ББК 22.161.61
У 95
DOI: 10.53598/2410-3225-2024-2-341-11-20

Прямые изоклины плоских полиномиальных векторных полей

(*Рецензирована*)

Адам Дамирович Ушхо

Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия, uschho76@mail.ru

Аннотация. *Представлен краткий обзор научных статей по теории прямых изоклин полиномиальных векторных полей n-ой степени на плоскости. Приводятся примеры применения данной теории для решения некоторых проблем качественной теории относительно квадратичных и кубических систем.*

Ключевые слова: *качественная теория дифференциальных уравнений, полиномиальная система на плоскости, прямая изоклина, канонический вид, предельный цикл, фокус, узел, седло*

Для цитирования: *Ушхо А. Д. Прямые изоклины плоских полиномиальных векторных полей // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. : Естественно-математические и технические науки. 2024. Вып. 2 (341). С. 11–20. DOI: 10.53598/2410-3225-2024-2-341-11-20*

Review Paper

Straight-line isoclines of planar polynomial vector fields

Adam D. Ushkho

Adyghe State University, Maykop, Russia, a.ushkho@adygnet.ru

Abstract. *A brief review of scientific articles on the theory of direct isoclines of polynomial vector fields of degree n in the plane is presented. Examples of application of this theory for solving some problems of qualitative theory with respect to quadratic and cubic systems are given.*

Keywords: *qualitative theory of differential equations, polynomial system on a plane, straight-line isocline, canonical form, limit cycle, focus, node, saddle*

For citation: *Ushkho A. D. Straight-line isoclines of planar polynomial vector fields // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. : Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2024. Iss. 2 (341). P. 11–20. DOI: 10.53598/2410-3225-2024-2-341-11-20*

Несмотря на бурное развитие вычислительной техники, качественные методы интегрирования динамической системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x, y), \end{cases} \tag{1}$$

где $P(x, y), Q(x, y)$ – аналитические функции в области $D \subset R^2$, не потеряли своей актуальности и в настоящее время. Во многом это объясняется тем, что численные методы позволяют строить лишь локальный фазовый портрет системы при обязательном выборе конкретных значений параметров системы.

Целью качественного интегрирования системы (1) является установление схемы поведения ее траекторий на всей фазовой плоскости [1, с. 60, 61]. Среди большого числа работ, посвященных исследованию системы (1), значительное место занимают работы, в которых усилиями многочисленных авторов решаются различные проблемы качественной теории в случае, когда система (1) имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{n} a_{ij}x^i y^j \equiv P_n(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i+j=0}^{n} b_{ij}x^i y^j \equiv Q_n(x,y), \end{cases} \tag{2}$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in R, (P_n, Q_n) = 1$.

В качественной теории дифференциальных уравнений важная роль отводится такому объекту, как изоклина. Использование изоклин, как указано в работе [2], вносит методологический аспект при исследовании поведения фазовых траекторий системы (2). Так, широко известен «метод двух изоклин» (метод Н. П. Еругина), который успешно применяется и в настоящее время (см., например, [3, 4]). Еще в фундаментальной работе [5] В. В. Немыцкий указывал на широкие возможности качественного исследования системы (2) с помощью главных изоклин. Здесь особо следует отметить тот случай, когда в роли главных изоклин выступают прямолинейные изоклины (далее в тексте – прямые изоклины). Насколько нам известно, первые научные публикации, освещающие применение прямых изоклин, появились в 60-е годы прошлого столетия. Так, А. Н. Берлинский в диссертационной работе [6] показал возможность приведения системы (2) при $n = 2$ к каноническому виду благодаря прямым изоклинам.

Под канонической формой записи системы (2), согласно работе [7], будем понимать такую форму ее записи, при которой

$$P_n(x,y) = (a_1x + b_1y + c_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (a_kx + b_ky + c_k)^{\alpha_k}\, \overline{P}(x,y) \text{ или}$$

$$Q_n(x,y) = (m_1x + n_1y + l_1)^{\beta_1} \cdot \dots \cdot (m_sx + n_sy + l_s)^{\beta_s}\, \overline{Q}(x,y),$$

где $\alpha_i, \beta_j \ (i = \overline{1,k},\ j = \overline{1,s})$ – целые неотрицательные числа, причем $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i > 0 \left(\sum\limits_{j=1}^{s} \beta_j > 0 \right), \overline{P}(x,y)\ \left(\overline{Q}(x,y)\right)$ – либо многочлен нулевой степени, либо многочлен степени $n \geq 2,$ не имеющий множителей вида $ax + by + c.$

В дальнейшем систему (2) в случае $n = 2\ (n = 3)$ будем называть квадратичной (кубической).

Представление квадратичной системы в канонической форме сделало возможным решение проблемы сосуществования четырех ее состояний равновесия, а именно доказана

Теорема 1 [8]. *Если квадратичная система имеет четыре состояния равновесия, образующих выпуклый четырехугольник, то две его противоположные вершины – седла, а две другие – антиседла; в случае невыпуклого четырехугольника внутренняя вершина – седло (антиседло), а внешние вершины – антиседла (седла).*

Замечание 1. Четырехугольник называется невыпуклым, если одна из его вершин расположена внутри треугольника, образованного тремя другими вершинами.

Замечание 2. Под антиседлом следует понимать простое состояние равновесия, не являющееся седлом.

Китайский математик Тун-Цзинь-чжу в статье [9] полностью решил вопрос о взаимном расположении трех предельных циклов квадратичной системы, используя при этом свойства прямых изоклин. Исчерпывающее исследование квадратичной системы на предмет существования и взаимного расположения прямых изоклин квадратичной системы проведено в работе [10] Л. В. Шаховой. После опубликования упомянутых выше работ А. Н. Берлинского, Тун-Цзинь-чжу, Л. В. Шаховой наблюдалось отсутствие сколь-нибудь значимого интереса к теме «прямые изоклины полиномиальных векторных полей». Лишь спустя три десятилетия в 1994 году появляется работа [11] Новосибирского математика В. М. Чересиза «Об изоклинах полиномиальных векторных полей», в которой дается оценка числа прямых изоклин системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P_m(x,y) + P_n(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q_m(x,y) + Q_n(x,y), \end{cases} \tag{3}$$

проходящих через состояние равновесия $O(0,0)$ при условии, что m и n – числа разной четности.

Основным результатом работы [10] является

Теорема 2. *Если дифференциальное уравнение траекторий квадратичной системы имеет хотя бы одну особую точку, то семейство его изоклин содержит хотя бы одну прямую изоклину.*

В работе [9] доказана

Лемма 1. *По крайней мере одна прямая из пучка прямых, проходящих через состояние равновесия квадратичной системы, является ее изоклиной. Прямая, проходящая через любые два состояния равновесия, есть изоклина (в том случае, конечно, когда число состояний равновесия больше, чем одно).*

Нетрудно заметить, что в теореме 2 и лемме 1 в разных формулировках утверждается существование хотя бы одной прямой изоклины, проходящей через состояние равновесия квадратичной системы.

Общим в работах [6, 8–10] является то, что существование хотя бы одной прямой изоклины, проходящей через состояние равновесия квадратичной системы, доказывается в них на основе критерия распадения кривой второго порядка, а именно условия равенства нулю третьего инварианта [12].

Утверждение авторов работ [8–10] относительно существования хотя бы одной прямой изоклины, проходящей через состояние равновесия квадратичной системы, является следствием работы [11].

К числу более поздних публикаций, посвященных изучению прямых изоклин полиномиальных векторных полей на плоскости, относятся работы [13, 14]. На основе статей [10, 13, 14] написана книга [15] под названием «Прямые изоклины и канонические формы полиномиальных дифференциальных систем на плоскости». Главный рецензент этой книги – заслуженный деятель науки республики Беларусь, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений Белорусского государственного университета Н. А. Лукашевич. В данной книге приводится новое доказательство теоремы о существовании хотя бы одной прямой изоклины, проходящей через состояние равновесия квадратичной системы, не опирающееся на сведения из теории плоских кривых второго порядка. В процессе доказательства этой теоремы получено характеристическое уравнение

$$\begin{aligned}&(a_{02}b_{01}-a_{01}b_{02})k^3+(a_{02}b_{10}+a_{11}b_{01}-a_{01}b_{11}-a_{10}b_{02})k^2+\\&+(a_{11}b_{10}+a_{20}b_{01}-a_{10}b_{11}-a_{01}b_{20})k+a_{20}b_{10}-a_{10}b_{20}=0\end{aligned} \tag{4}$$

прямой изоклины, проходящей через состояние равновесия $O(0,0)$ системы

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\sum\limits_{i+J=1}^{2}a_{ij}x^iy^j\equiv P_2(x,y),\\ \dfrac{dy}{dt}=\sum\limits_{i+j=1}^{2}b_{ij}x^iy^j\equiv Q_2(x,y),\end{cases} \tag{5}$$

где

$$a_{ij},b_{ij}\in R,(P_2,Q_2)=1,|a_{10}|+|a_{01}|+|b_{10}|+|b_{01}|>0\,. \tag{6}$$

Уравнение (4) названо характеристическим, так как ему удовлетворяют возможные направления (угловые коэффициенты k) прямых изоклин, проходящих через состояние равновесия $O(0,0)$ системы (5). Согласно уравнению (4), при условии (6) через состояние равновесия квадратичной системы проходит не менее одной и не более трех прямых изоклин. Отметим наиболее значимые, на наш взгляд, результаты работы [15].

1. Если прямая $l:y-kx-b=0$ проходит через состояния равновесия $(x_i,y_i),i=\overline{1,n}$ системы (2), то $l-$ изоклина этой системы.

2. Пусть кривая $L-$изоклина системы (1), то есть выполняется равенство

$$\left(\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}\right)_{(x,y)\in L}\equiv m,\ m-const\,. \tag{7}$$

Тогда в результате невырожденного преобразования

$$\begin{cases}x=\alpha\overline{x}+\beta\overline{y},\\ y=\gamma\overline{x}+\delta\overline{y}\end{cases} \tag{8}$$

L трансформируется в изоклину $\overline{L}$ системы

$$\begin{cases}\dfrac{d\overline{x}}{d\tau}=\delta P(\alpha\overline{x}+\beta\overline{y},\gamma\overline{x}+\delta\overline{y})-\beta Q(\alpha\overline{x}+\beta\overline{y},\gamma\overline{x}+\delta\overline{y}),\\ \dfrac{d\overline{y}}{d\tau}=-\gamma P(\alpha\overline{x}+\beta\overline{y},\gamma\overline{x}+\delta\overline{y})+\alpha Q(\alpha\overline{x}+\beta\overline{y},\gamma\overline{x}+\delta\overline{y}),\end{cases} \tag{9}$$

где $d\tau=\dfrac{dt}{\Delta},\ \Delta=\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$, так, что

$$\left(\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}}\right)_{(\overline{x},\overline{y})\in\overline{L}}\equiv\frac{-\gamma+\alpha m}{\delta-\beta m}=\overline{m}. \tag{10}$$

Замечание 3. Равенство (7) будем трактовать так: на изоклине L система (1) индуцирует направление m.

Замечание 4. Из равенства (10) следует, что произвольную изоклину системы (1) можно перевести посредством преобразования (8) в одну из главных изоклин, а именно если $\gamma=\alpha m$ $(\delta=\beta m)$, то $\overline{L}$ – изоклина нуля (бесконечности) системы (9).

3. Точка $M(x_0,y_0)$ – состояние равновесия системы (1) тогда и только тогда, когда существуют хотя бы две изоклины L_1,L_2, проходящие через M, на которых эта система индуцирует различные направления.

4. Если квадратичная система имеет четыре состояния равновесия, то подходящим преобразованием (8) ее можно привести к каноническому виду

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (a_1 x + b_1 y + c_1)(a_2 x + b_2 y + c_2), \\ \dfrac{dy}{dt} = (a_3 x + b_3 y + c_3)(a_4 x + b_4 y + c_4). \end{cases} \tag{11}$$

5. Квадратичная система имеет не более шести прямых изоклин при условии, что ее правые части не являются однородными многочленами.

Как показано выше, через каждое состояние равновесия квадратичной системы проходит хотя бы одна прямая изоклина. Однако это свойство не характерно для кубической системы.

Пример 1 [15]**.** Через состояние равновесия $O(0,0)$ системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x^2 - 3xy + y^2 - 12x^3 - 13x^2 y + y^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 3x + 240x^3 - 38x^2 y - 7xy^2 + y^3 \end{cases} \tag{12}$$

не проходит ни одна прямая изоклина.

6. Через состояние равновесия кубической системы, правые части которой не являются однородными, проходит не более пяти прямых изоклин.

7. Если на кривой второго порядка L_2 расположены 6 состояний равновесия кубической системы, то L_2 – изоклина этой системы. В терминах теории плоских кривых третьего порядка это утверждение трактуется так: если кривые третьего порядка $Q_3(x,y)=0,\ P_3(x,y)=0$ на плоскости имеют 6 общих точек, принадлежащих коническому сечению, то в пучке кривых $Q_3(x,y) - mP_3(x,y) = 0$ имеется кривая, распадающаяся на прямую и коническое сечение.

8. Если кубическая система имеет 9 состояний равновесия в ограниченной части фазовой плоскости, то любая ее прямая изоклина проходит через три состояния равновесия.

9. Если кубическая система имеет 9 состояний равновесия и не менее девяти прямых изоклин, то множество M всех ее прямых изоклин может быть разбито на непересекающиеся непустые подмножества только одним из двух способов:

$$\text{а) } M = \bigcup_{i=1}^{3} M_i; \qquad \text{б) } M = \bigcup_{i=1}^{4} M_i,$$

где $M_1 = \{l_1^{m_1}, l_2^{m_1}, l_3^{m_1}\}$, $M_2 = \{l_4^{m_2}, l_5^{m_2}, l_6^{m_2}\}$, $M_3 = \{l_7^{m_3}, l_8^{m_3}, l_9^{m_3}\}$, $(m_1 - m_2)(m_1 - m_3)(m_2 - m_3) \neq 0.$

Символом $l_i^{m_j}$ обозначена прямая изоклина l_i, на которой индуцировано направление m_j.

Прямые изоклины $l_r^{m_s}$ и $l_u^{m_v}$ считаются различными, если $|r-u| + |m_s - m_v| > 0$.

10. Кубическая система, правые части которой не являются однородными, имеет не более десяти прямых изоклин.

11. Из предыдущего пункта следует важное для теории плоских кривых третьего порядка утверждение: в пучке кривых третьего порядка с девятью базисными точками не более трех кривых, каждая из которых распадается на три прямые. Если таких кривых три, то, быть может, еще одна кривая пучка распадается на прямую и неприводимую кривую второго порядка.

В статье [7] дается краткий обзор результатов работ по теории прямых изоклин плоских полиномиальных векторных полей, рассматриваются некоторые приложения этой теории к квадратичным и кубическим системам. В частности, доказывается известная теорема Берлинского [8] о числе особых точек второй группы дифференциального уравнения траекторий квадратичной системы. Оценке сверху общего числа прямых изоклин системы (2) при произвольном $n \in N, n \geq 2$ посвящена статья [16], в которой доказано, что количество K прямых изоклин системы (2) удовлетворяет неравенству

$$K \leq 6n - 5,\ n \geq 2\,. \tag{13}$$

В настоящее время нам неизвестны примеры, показывающие, что оценка (13) точна. Так как инвариантная прямая системы (2) является прямой изоклиной, то процедура доказательства неравенства (13) позволила установить, что количество инвариантных прямых I системы (2) удовлетворяет неравенству

$$I \leq 3n - 1\,. \tag{14}$$

Ранее иным способом доказано неравенство (14) в работе [17]. В работе [16] также доказано, что количество параллельных между собой прямых изоклин и количество прямых изоклин системы (2), инцидентных отдельно взятому состоянию равновесия, ограничены сверху числом $2n-1$.

Все утверждения в [16] доказываются при выполнении условий:

1) $\deg(P_n^{\,2}(x,y) + Q_n^{\,2}(x,y)) = 2n$;

2) $(P_n, Q_n) = 1$;

3) $\sum\limits_{i+j=1}^{n-1} a_{ij} x^i y^j \not\equiv 0$ или $\sum\limits_{i+j=1}^{n-1} b_{ij} x^i y^j \not\equiv 0$;

4) система (2) имеет хотя бы одно состояние равновесия.

Теорема об оценке числа прямых изоклин системы (2), проходящих через состояние равновесия, в работе [2] доказана способом, отличным от способа доказательства в [16]. Из доказанного в [2] утверждения: *какие бы* $n+1$ *прямых изоклин системы* (2) *ни взять*, *среди них найдутся хотя бы две прямые*, *на которых индуцированы различные направления*, следует, что дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q_n(x,y)}{P_n(x,y)} \tag{15}$$

фазовых траекторий системы (2) имеет не более n различных интегральных прямых с одним и тем же угловым коэффициентом.

Обобщением доказанного в [15] утверждения: *на противоположных сторонах выпуклого четырехугольника*, *вершинами которого являются состояния равновесия квадратичной системы*, *индуцировано одно и то же направление*, является

Теорема 3 [2]**.** *Пусть прямая* l_1 *проходит через состояния равновесия* $A_1, A_2, ..., A_n$ *системы* (2) и l_2 *– прямая изоклина этой же системы*, *причем* $A_i \notin l_2$ $(i = \overline{1,n})$. *Тогда система* (2) *индуцирует одно и то же направление на прямых* l_1 *и* l_2.

На основании теоремы 3 доказана

Теорема 4 [2]**.** *Если через каждую из особых точек* $A_1, A_2, ..., A_n$ *дифференциального уравнения* (15) *проходит одна и только одна прямая изоклина* l, *то число прямых изоклин уравнения* (15) *не превосходит* n.

Из теоремы 4 следует утверждение, которое в терминах теории плоских кривых формулируется так: *если плоские кривые порядка* n *имеют* n *общих точек* $A_1, A_2, ..., A_n$, *расположенных на прямой* l, *и не существует ни одной прямой*, *принадлежащей пучку кривых*

$$Q_n(x,y) - mP_n(x,y) = 0 \tag{16}$$

и проходящей через точку $A_i, i \in \{1, 2, ..., n\}$, *то в пучке* (16) *содержится только одна* *распадающаяся кривая* L_n, *среди компонент которой есть хотя бы одна прямая, в том числе прямая* l.

Пример 2 [2]**.** Дифференциальное уравнение $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-3\alpha x^2+\alpha y^2+4xy-3y}{x^2-3y^2+4\alpha xy-2x+\alpha y}$ имеет при $\alpha=3$ две особые точки $(0,0),(0,1)$ [18], которые принадлежат одной и только одной прямой $x=0$. В пучке кривых

$$-9x^2+3y^2+4xy-3y-m(x^2-3y^2+12xy-2x+3y)=0$$

содержится единственная распадающаяся кривая $x(4x-8y+1)=0$, соответствующая значению $m=-1$.

Непосредственное отношение к теории прямых изоклин имеет доказанная в работе [19]

Теорема 5. *Если* n^2-n *состояний равновесия системы* (2) *расположены на кривой* L_{n-1} *порядка* $n-1$, *то* L_{n-1} – *изоклина этой системы.*

Следствием теоремы 5 является утверждение о том, что прямая, проходящая через два состояния равновесия квадратичной системы, является ее изоклиной. Доказанная в [20] теорема, согласно которой коническое сечение L_2 – изоклина кубической системы, если L_2 проходит через 6 ее состояний равновесия, также непосредственно следует из теоремы 5.

Особо следует отметить, что прямые изоклины и связанные с ними канонические формы полиномиальных векторных полей могут эффективно использоваться при решении различных проблем качественной теории. Так, в статье [21] доказано отсутствие предельных циклов системы

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\sum\limits_{i+j=0}^{2}a_{ij}x^iy^j\equiv P_2(x,y),\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=\sum\limits_{i+j=0}^{2}b_{ij}x^iy^j\equiv Q_2(x,y),\end{cases}\tag{17}$$

где $a_{ij},b_{ij}\in R,(P_2,Q_2)=1$, при условии, что на прямой $l:P'_{2x}(x,y)+Q'_{2y}(x,y)=0$ эта система имеет два состояния равновесия. Доказательство основано на аффинных преобразованиях переменных x,y, приводящих систему (17) к каноническому виду. Ранее этот факт доказан авторами работы [22] в следующей формулировке: *система*

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=1+xy,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2\end{cases}\tag{18}$$

при наличии у этой системы двух негрубых фокусов, или негрубого фокуса и седла с равными по модулю характеристическими числами, или двух седел, каждое из которых имеет равные по модулю характеристические числа, не имеет предельных циклов. Доказательство основано на нелинейных преобразованиях фазовых переменных.

Об актуальности вопроса о прямых изоклинах автономных дифференциальных систем на плоскости также свидетельствует доказанная в [23]

Теорема 6. *Пусть система* (17) *имеет ось симметрии S-типа и два состояния равновесия второй группы* Φ_1 *и* Φ_2 *в ограниченной части фазовой плоскости. Тогда* Φ_1 *и* Φ_2 – *центры.*

Согласно определению [23], ось симметрии S-типа является инвариантной прямой, а следовательно, прямой изоклиной. Это дает возможность привести исследуемую систему к каноническому виду посредством преобразования (8).

Пример 3 [23]**.** Система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5 - 8x - y^2 + 4x^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = y(-1 + x) \end{cases}$$

имеет ось симметрии S-типа $y = 0$ и два состояния равновесия $\Phi_1(1{,}1), \Phi_2(1{,}-1)$ второй группы, то есть для них существует проблема отличия центра от фокуса [24]. По теореме 6 оба состояния равновесия являются центрами.

Элементарно доказывается также ацикличность системы (17), имеющей ось симметрии $N-$типа. Ось симметрии $N-$типа системы (2) представляет собой прямую изоклину, которую пересекают траектории под прямым углом [25].

Замечание 5. Номера теорем и лемм в данной работе не обязательно совпадают с их номерами в источниках ссылок.

Замечание 6. Термин «состояние равновесия системы (2)» мы применяем к точкам, удовлетворяющим системе $\begin{cases} P(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0 \end{cases}$, в отличие от термина «особая точка», применяемого по отношению к дифференциальному уравнению.

Отметим, что возможности для исследователей, предоставляемые теорией прямых изоклин, позволяют проводить весьма тонкие исследования. Об этом говорят и недавние работы (см. [26–30] и цитируемую в них литературу).

Примечания

1. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. Москва : Наука, 1976. 496 с.

2. Тлячев В. Б., Ушхо А. Д., Ушхо Д. С. О прямых изоклинах векторных полей на плоскости // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2014. № 2 (1). С. 148–156.

3. Gaiko V. A. Limit Cycle Bifurcation in a Quadratic System with Two Parallel Straight Line-Isoclines // Reports 0806 of the Department of Applied Mathematical Analysis Delft: Delft University of Technology, 2008. 13 p.

4. Gaiko V. A. On an application of two isoclines method to investigation of two-dimensional dynamical systems // Advanc. Synerg. 1994. Vol. 2. P. 104–109.

5. Немыцкий В. В. Некоторые современные проблемы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. 1965. Т. 20, вып. 4 (124). С. 3–16.

6. Берлинский А. Н. Некоторые вопросы качественного исследования дифференциального уравнения $dy/dx=P(x,y)/Q(x,y)$, где P и Q – многочлены не выше второй степени : дис. … канд. физ.-мат. наук. Ташкент, 1959. 115 с.

7. Тлячев В. Б., Ушхо А. Д., Ушхо Д. С. К вопросу о прямых изоклинах полиномиальных дифференциальных систем на плоскости // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2010. № 1. С. 156–162.

8. Берлинский А. Н. О поведении интегральных кривых одного дифференциального уравнения // Известия высших учебных заведений. 1960. № 2 (15). С. 3–18.

9. Тун-Цзинь-чжу. Расположение предельных циклов системы $\dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{0 \le i+j \le 2} a_{ij} x^i y^j$, $\dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{0 \le i+j \le 2} b_{ij} x^i y^j$ // Периодический сборник переводов иностранных статей. Математика. 1962. Т. 6, № 2. С. 150–168.

10. Шахова Л. В. О прямых изоклинах // Труды Самаркандского государственного университета им. Алишера Навои. 1964. № 144. С. 93–105.

11. Чересиз В. М. Об изоклинах полиномиальных векторных полей // Сибирский математический журнал. 1994. Т. 35, № 6. С. 1390–1396.

12. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. Москва : Наука, 1981. 232 с.

13. Ушхо Д. С., Горних М. И. Прямые изоклины и канонические формы квадратичной дифференциальной системы на плоскости // Труды ФОРА. 2002. № 7. С. 72–82. URL: http://fora.adygnet.ru

14. Ушхо Д. С. О прямых изоклинах кубической дифференциальной системы // Труды ФОРА. 2003. № 8. С. 7–21.

15. Ушхо Д. С. Прямые изоклины и канонические формы полиномиальных дифференциальных систем на плоскости. Майкоп : Изд-во АГУ, 2007. 93 с.

16. Тлячев В. Б., Ушхо А. Д., Ушхо Д. С. Оценка числа прямых изоклин полиномиальных векторных полей // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. : Естественно-математические и технические науки. 2013. Вып. 3 (122). С. 18–27. URL: http://vestnik.adygnet.ru

17. Artes J., Grunbaum B., Llibre I. On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems // Pacific Journal of Mathematics. 1998. Vol. 184, No. 2. P. 207–230.

18. Дружкова Т. А. О квадратичном дифференциальном уравнении с алгебраическим интегралом // Дифференциальные и интегральные уравнения. Горький : Горьковский гос. ун-т, 1977. С. 3–6.

19. Тлячев В. Б., Ушхо А. Д., Ушхо Д. С. Состояния равновесия и смежные вопросы теории плоских полиномиальных векторных полей // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2020. № 1. С. 30–54.

20. Ушхо Д. С. Новое доказательство одной теоремы об оценке числа особых точек второй группы кубической дифференциальной системы // Вестник Адыгейского государственного университета. 2008. Вып. 1 (29). С. 13–18.

21. Ушхо Д. С. Об одном методе доказательства отсутствия изолированных периодических решений квадратичной системы // Труды ФОРА. 2022. № 27. С. 1–6. URL: http://fora.adygnet.ru

22. Черкас Л. А., Жилевич Л. И. Об отсутствии предельных циклов у одного дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 8, № 12. С. 2271–2273.

23. Ушхо А. Д. Новое доказательство отсутствия предельных циклов квадратичной системы, имеющей ось симметрии S-типа // Труды ФОРА. 2020. № 25. С. 4–7. URL: http://fora.adygnet.ru

24. Амелькин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П. Нелинейные колебания в системах второго порядка. Минск : Изд-во БГУ, 1982. 208 с.

25. Тлячев В. Б., Ушхо А. Д., Ушхо Д. С. Оси симметрии полиномиальных дифференциальных систем на плоскости // Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. : Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, вып. 2. С. 41–49.

26. Bujac C., Vulpe N. First integrals and phase portraits of planar polynomial differential cubic systems with invariant straight lines of total multiplicity eight // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2017. No. 85. P. 1–35. DOI: https://doi.org/10.14232/ejqtde.2017.1.85

27. Llibre J. On the centers of cubic polynomial differential systems with four invariant straight lines // Topological Methods in Nonlinear Analysis. 2020. Vol. 55, No. 2. P. 387–402. DOI: 10.12775/TMNA.2020.004

28. Bujac C., Schlomiuk D., Vulpe N. The family of cubic differential systems with two real and two complex distinct infinite singularities and invariant straight lines of the type (3, 1, 1, 1) // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2023. No. 40. P. 1–94. URL: https://doi.org/10.14232/ejqtde.2023

29. Hongjin He, Changjian Liu, Dongmei Xiao. Centers and invariant straight lines of planar real polynomial vector fields and its configurations // arXiv:2303.14403 or arXiv:2303.14403v1. 45 p. URL: https://doi.org/10.48550/arXiv.2303.14403

30. Hongjin He, Changjian Liu, Dongmei Xiao. Configuration of planar Kolmogorov cubic polynomial differential systems with the most centers // Discrete and Continuous Dynamical Systems B. 2024. Vol. 29, Iss. 3. P. 1549–1566. DOI: 10.3934/dcdsb.2023144

References

1. Bautin N. N., Leontovich E. A. Methods and techniques of the qualitative study of dynamical systems on the plane. Moscow : Nauka, 1976. 496 p.

2. Tlyachev V. B., Ushkho A. D., Ushkho D. S. On straight-line isoclines of planar vector fields // Bulletin of Nizhny Novgorod University of N. I. Lobachevsky. 2014. No. 2 (1). P. 148–156.

3. Gaiko V. A. Limit Cycle Bifurcation in a Quadratic System with Two Parallel Straight Line-Isoclines // Reports 0806 of the Department of Applied Mathematical Analysis Delft: Delft University of Technology, 2008. 13 p.

4. Gaiko V. A. On an application of two isoclines method to investigation of two-dimensional dynamical systems // Advanc. Synerg. 1994. Vol. 2. P. 104–109.

5. Nemytsky V. V. Some modern problems of the qualitative theory of the ordinary differential equations // Successes of Mathematical Sciences. 1965. Vol. 20, Iss. 4 (124). P. 3–16.

6. Berlinsky A. N. Some questions of qualitative research of the differential equation $dy/dx=P(x,y)/Q(x,y)$, where P and Q – multinomials not above the second degree : Dissertation for the Candidate of Physics and Mathematics degree. Tashkent, 1959. 115 p.

7. Tlyachev V. B., Ushkho A. D., Ushkho D. S. On the question of straight isoclines of polynomial differential systems on the plane // The Bulletin of Nizhny Novgorod University of N. I. Lobachevsky. 2010. No. 1. P. 156–162.

8. Berlinsky A. N. On the behavior of integral curves of one differential equation // News of Higher Schools. 1960. No. 2 (15). P. 3–18.

9. Tung Chin-Chu. Positions of limit-cycles of the system $\frac{dx}{dt}=\sum_{0\le i+j\le 2} a_{ij}x^i y^j,\ \frac{dy}{dt}=\sum_{0\le i+j\le 2} b_{ij}x^i y^j$ // The periodic collection of translations of foreign articles. Mathematics. 1962. Vol. 6, No. 2. P. 150–168.

10. Shakhova L. V. About straight isoclines // Proceedings of Samarkand State University of Alisher Navoi. 1964. No. 144. P. 93–105.

11. Cheresiz V. M. On isoclines of polynomial vector fields // The Siberian Mathematical Journal. 1994. Vol. 35, No. 6. P. 1390–1396.

12. Ilyin V. A., Poznyak E. G. Analytical Geometry. Moscow : Nauka, 1981. 232 p.

13. Ushkho A. D., Gornikh M. I. Straight isoclines and canonical forms of a quadratic differential system in the plane // Proceedings of Physical Society of Adyghea Republic. 2002. No. 7. P. 72–82. URL: http://fora.adygnet.ru

14. Ushkho D. S. About straight isoclines of cubic differential system // Proceedings of Physical Society of Adyghea Republic. 2003. No. 8. P. 7–21.

15. Ushkho D. S. Straight isoclines and canonical forms of polynomial differential systems on the plane. Maykop : ASU Publishing House, 2007. 93 p.

16. Tlyachev V. B., Ushkho A. D., Ushkho D. S. Assessment of the number of straight-line isoclines of the polynomial vector fields on the plane // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. : Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2013. Iss. 3 (122). P. 18–27. URL: http://vestnik.adygnet.ru

17. Artes J., Grunbaum B., Llibre I. On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems // Pacific Journal of Mathematics. 1998. Vol. 184, No. 2. P. 207–230.

18. Druzhkova T A. On a quadratic differential equation with an algebraic integral // Differential and Integral Equations. Gorky : Gorky State University, 1977. P. 3–6.

19. Tlyachev V. B., Ushkho A. D., Ushkho D. S. Equilibrium states and ajacent questions of the plane polynomial vector fields theory // Differential Equations and Control Processes. 2020. No. 1. P. 30–54.

20. Ushkho D. S. The new proof of a theorem on an estimation of the number of special points of the second group of cubic differential system // The Bulletin of the Adyghe State University. 2008. Iss. 1 (29). P. 13–18. URL: http://vestnik.adygnet.ru

21. Ushkho D. S. On one method of proving the absence of isolated periodic solutions of a quadratic system // Proceedings of Physical Society of Adyghea Republic. 2022. No. 27. P. 1–6. URL: http://fora.adygnet.ru

22. Cherkas L. A., Zhilevich L. I. On the lack of limit cycles of one differential equation // Differential Equations. 1972. Vol. 8, No. 12. P. 2271–2273.

23. Ushkho A. D. New proof of the absence of limit cycles for a quadratic system with an S-type symmetry axis // Proceedings of Physical Society of Adyghea Republic. 2020. No. 25. P. 4–7. URL: http://fora.adygnet.ru

24. Amelkin V. V., Lukashevich N. A., Sadovsky A. P. Nonlinear oscillations in second-order systems. Minsk : BSU Publishing House, 1982. 208 p.

25. Tlyachev V. B., Ushkho A. D., Ushkho D. S. Symmetry axis of planar polynomial differential systems // News of Saratov University. New Series. Ser. Mathematics. Mechanics. Informatics. 2010. Vol. 10, Iss. 2. P. 41–49.

26. Bujac C., Vulpe N. First integrals and phase portraits of planar polynomial differential cubic systems with invariant straight lines of total multiplicity eight // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2017. No. 85. P. 1–35. DOI: https://doi.org/10.14232/ejqtde.2017.1.85

27. Llibre J. On the centers of cubic polynomial differential systems with four invariant straight lines // Topological Methods in Nonlinear Analysis. 2020. Vol. 55, No. 2. P. 387–402. DOI: 10.12775/TMNA.2020.004

28. Bujac C., Schlomiuk D., Vulpe N. The family of cubic differential systems with two real and two complex distinct infinite singularities and invariant straight lines of the type (3, 1, 1, 1) // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2023. No. 40. P. 1–94. URL: https://doi.org/10.14232/ejqtde.2023

29. Hongjin He, Changjian Liu, Dongmei Xiao. Centers and invariant straight lines of planar real polynomial vector fields and its configurations // arXiv:2303.14403 or arXiv:2303.14403v1. 45 p. URL: https://doi.org/10.48550/arXiv.2303.14403

30. Hongjin He, Changjian Liu, Dongmei Xiao. Configuration of planar Kolmogorov cubic polynomial differential systems with the most centers // Discrete and Continuous Dynamical Systems B. 2024. Vol. 29, Iss. 3. P. 1549–1566. DOI: 10.3934/dcdsb.2023144

Статья поступила в редакцию 16.04.2024; *одобрена после рецензирования 26.04.2024*; *принята к публикации 27.04.2024*.

The article was submitted 16.04.2024; *approved after reviewing 26.04.2024*; *accepted for publication 27.04.2024*.