

МАТЕМАТИКА MATHEMATICS

Научная статья

УДК 514.754.7

ББК 22.151.6

Р 65

DOI: 10.53598/2410-3225-2024-3-346-11-20

О бифуркациях полицикла, образованного сепаратрисами четырех седел динамической системы, инвариантной при инволюции, имеющей кривую из неподвижных точек (Рецензирована)

Владимир Шлеймович Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет, Ярославль, Россия,
vroitenberg@mail.ru

Аннотация. Рассматривается двухпараметрическое семейство гладких векторных полей на плоскости, инвариантных относительно инволюции I , неподвижные точки которой образуют гладкую линию F . Предполагается, что при нулевых значениях параметров векторное поле имеет два седла на линии F , причем дуга линии F между ними является их общей сепаратрисой, а также два симметричных седла, выходящие и входящие сепаратрисы которых идут в указанные седла на F . Эти сепаратрисы и седла образуют полицикл, состоящий из двух симметричных контуров, имеющих общую дугу, принадлежащую F . Для типичных семейств описано разбиение окрестности нуля на плоскости параметров на классы топологической эквивалентности векторных полей в окрестности полицикла.

Ключевые слова: векторное поле на плоскости, инволюция, инвариантность, седло, сепаратриса, бифуркация, предельный цикл

Для цитирования: Ройтенберг В. Ш. О бифуркациях полицикла, образованного сепаратрисами четырех седел динамической системы, инвариантной при инволюции, имеющей кривую из неподвижных точек // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. : Естественно-математические и технические науки. 2024. Вып. 3 (346). С. 11–20. DOI: 10.53598/2410-3225-2024-3-346-11-20

Original Research Paper

On bifurcations of a polycycle formed by separatrices of four saddles of a dynamical system invariant under involution, having a curve of fixed points

Vladimir Sh. Roytenberg

Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russia, vroitenberg@mail.ru

Abstract. We consider a two-parameter family of smooth vector fields on the plane invariant with respect to an involution I whose fixed points form a smooth line. It is assumed that for zero values of the parameters the vector field has two saddles on the line F , with the arc of the line F between them being their common separatrix, as well as two symmetric saddles whose outgoing and incoming separatrices go to the indicated saddles on F . These separatrices and saddles form a polycycle consisting of two symmetric contours with a common arc belonging to F . For generic families, we describe a partition of the neighborhood of zero on the plane of parameters into classes of topological equivalence of vector fields in the neighborhood of the polycycle.

Keywords: planar vector field, involution, invariance, saddle, separatrix, bifurcation, limit cycle

For citation: Roytenberg V. Sh. On bifurcations of a polycycle formed by separatrices of four saddles of a dynamical system invariant under involution, having a curve of fixed points // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. : Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2024. Iss. 3 (346). P. 11–20. DOI: 10.53598/2410-3225-2024-3-346-11-20

Введение

Изучение бифуркаций гладких динамических систем с различными видами симметрий представляет как теоретический, так и практический интерес [1].

Пусть C^∞ – диффеоморфизм $I: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ плоскости \mathbf{R}^2 является инволюцией, то есть $I^2 = I \circ I$ – тождественное отображение, а множество Fix неподвижных точек инволюции является гладкой линией – связным одномерным C^∞ -подмногообразием \mathbf{R}^2 . Простейший пример такой инволюции: $\mathbf{R}^2 \ni (z_1, z_2) \rightarrow (z_1, -z_2) \in \mathbf{R}^2$.

Векторное поле ν в \mathbf{R}^2 инвариантно относительно I , если $\forall z \in \mathbf{R}^2 \ dI(\nu(z)) = \nu(I(z))$. Для любой траектории L поля $I(L)$ – также траектория. Множество Fix состоит из траекторий, $\mathbf{R}^2 \setminus \text{Fix}$ состоит из двух связных компонент, которые обозначим \mathbf{R}_+^2 и \mathbf{R}_-^2 .

Локальные бифуркации в типичных однопараметрических семействах векторных полей с рассматриваемой симметрией тривиальны, а в типичных двухпараметрических семействах описаны в [2]. Нелокальные бифуркации в однопараметрических семействах указаны в [3]. Бифуркации полициклов, образованных сепаратрисами негрубых особых точек, в типичных двухпараметрических семействах с такой симметрией рассматривались в работах [4] и [5]. В настоящей работе изучаются типичные двухпараметрические бифуркации полициклов, образованных сепаратрисами грубых седел.

1. Условия

Рассмотрим семейство векторных полей $\nu_\varepsilon(z) = Z_1(z, \varepsilon)\partial/\partial z_1 + Z_2(z, \varepsilon)\partial/\partial z_2$, инвариантных относительно инволюции I . Будем предполагать, что Z_1 и Z_2 являются C^r -гладкими функциями ($r \geq 3$) точки $z = (z_1, z_2) \in \mathbf{R}^2$ и двумерного параметра ε , меняющегося в окрестности E^0 нуля в \mathbf{R}^2 .

Пусть для векторного поля ν_0 выполняются следующие условия $(C_1) - (C_3)$ (рис. 1).

(C_1) Поле ν_0 имеет два гиперболических седла $O_k^0 \in \text{Fix}$ ($k = 1, 2$) с характеристическими показателями $\lambda_{k1}^0 > 0$, $\lambda_{k2}^0 < 0$ и два гиперболических седла $O_\pm^0 \notin \text{Fix}$ и $O_-^0 = I(O_+^0)$ с характеристическими показателями $\lambda_3^0 > 0$ и $\lambda_3^0 < 0$. Седловые индексы $\lambda_i^0 := -\lambda_{i2}^0 / \lambda_{i1}^0$ ($i = 1, 2, 3$) удовлетворяют неравенствам $\lambda_3^0 \neq 1$, $\lambda_1^0 \lambda_2^0 \neq 1$ и $\lambda_1^0 \lambda_2^0 \lambda_3^0 \neq 1$.

(C_2) Открытая дуга $\widehat{O_1^0 O_2^0} \subset \text{Fix}$ с концами в точках O_1^0 и O_2^0 является входящей сепаратрисой седла O_1^0 и выходящей сепаратрисой седла O_2^0 . Существуют траектория $L_1^+ \subset \mathbf{R}_+^2$ ($L_1^- = I(L_1^+) \subset \mathbf{R}_-^2$), являющаяся выходящей сепаратрисой седла O_1^0 и входящей сепаратрисой седла O_+^0 (O_-^0), и траектория L_2^+ (L_2^-), являющаяся входящей сепаратрисой седла O_2^0 и выходящей сепаратрисой седла O_+^0 (O_-^0).

(C_3) Область $G_\pm \subset \mathbf{R}_\pm^2$, ограниченная сепаратрисным контуром

$$\Gamma^\pm := \widehat{O_1^0 O_2^0} \cup L_1^\pm \cup \{O_1^0, O_2^0, O_0^\pm\},$$

не пересекается с сепаратрисами седла O_\pm^0 .

Пусть $\tau_k : (-1, 1) \rightarrow \mathbf{R}^2$ ($k = 1, 2$) – такие C^r -вложения, трансверсальные траекториям поля \mathbf{v}_0 , что $\tau_k(0) \in L_k^+$, $\tau^k(0, 1) \subset G_+$. Окрестность нуля $E^1 \subset E^0$ можно выбрать так, что для любого $\varepsilon \in E^1$ поле \mathbf{v}_ε имеет седла $O_k(\varepsilon) \in \text{Fix}$, $O_k(\cdot) \in C^r$, $O_k(0) = O_k^0$ ($k = 1, 2$), с характеристическими показателями $\lambda_{k1}(\varepsilon) > 0$ и $\lambda_{k2}(\varepsilon) < 0$, а также седла $O_+(\varepsilon)$, $O_+(\cdot) \in C^r$, $O_+(0) = O_+^0$, и $O_-(\varepsilon) = I(O_+(\varepsilon))$ с характеристическими показателями $\lambda_{31}(\varepsilon) > 0$ и $\lambda_{32}(\varepsilon) < 0$. Так как инвариантные многообразия седла C^{r-1} гладко зависят от параметра ε , то можно считать, что седло $O_k(\varepsilon)$ имеет выходящую при $k = 1$ и входящую при $k = 2$ сепаратрису $L_k(\varepsilon)$, трансверсально пересекающую дугу $\tau_k(-1, 1)$ в точке $\tau_k(u_k(\varepsilon))$, где $u_k(\cdot) \in C^{r-1}$, $u_k(0) = 0$, а седло $O_+(\varepsilon)$ имеет входящую при $k = 1$ и выходящую при $k = 2$ сепаратрису $L_k^+(\varepsilon)$, трансверсально пересекающую дугу $\tau_k(-1, 1)$ в точке $\tau_k(u_k^+(\varepsilon))$, где $u_k^+(\cdot) \in C^{r-1}$, $u_k^+(0) = 0$.

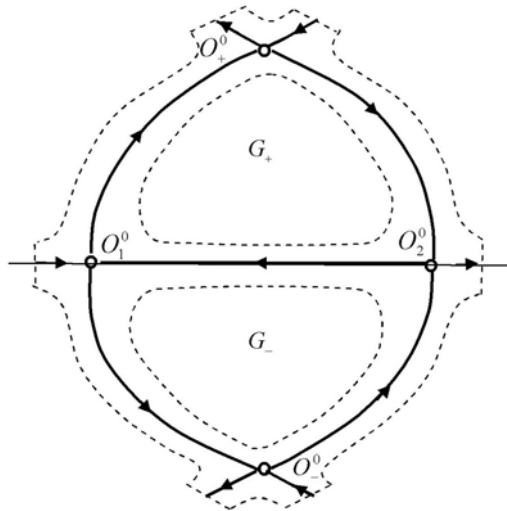


Рис. 1. Полицикл и его окрестность

Fig. 1. The polycycle and its neighborhood

Обозначим $\sigma_k(\varepsilon) := u_k(\varepsilon) - u_k^+(\varepsilon)$ и потребуем выполнения условия

(C₄) Производные $\sigma_1'(0)$ и $\sigma_2'(0)$ линейно независимы.

Оно не зависит от произвола в выборе отображений τ_k .

При условии (C₄) можно выбрать в некоторой окрестности нуля $E' \subset E^1$ C^{r-1} – координаты $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ так, что для любого $\varepsilon \in E'$

$$u_k(\varepsilon) - u_k^+(\varepsilon) = \varepsilon_k, \quad k = 1, 2. \quad (1)$$

Теперь можно считать $\varepsilon \equiv (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, а $E' = (-\delta', \delta')^2$ при некотором $\delta' > 0$.

Далее ограничимся рассмотрением только случая $\lambda_3^0 > 1$, поскольку случай $\lambda_3^0 < 1$ сводится к $\lambda_3^0 > 1$ переходом к семейству векторных полей $-\mathbf{v}_\varepsilon$, $\varepsilon \in E^0$.

2. Результаты

Теорема. Пусть семейство векторных полей v_ε , $\varepsilon \in E^0$, удовлетворяет условиям $(C_1) - (C_4)$. Тогда можно выбрать окрестность $U = I(U)$ полицикла $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$ (рис. 1) и окрестность $E := (-\delta, \delta)^2 \subset E^*$ нуля со следующими свойствами:

1) В случае $\lambda_3^0 > 1$, $\lambda_1^0 \lambda_2^0 < 1$, $\lambda_1^0 \lambda_2^0 \lambda_3^0 > 1$ существует разбиение области параметров E на множества (рис. 2) $B_0 = \{(0, 0)\}$, $B_j, E_j, j = 1, 2, \dots, 7$, где $B_1 = (0, \delta) \times \{0\}$, $B_i = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = b_i(\varepsilon_1)\}$, $b_i \in C^1((0, \delta), (0, \delta))$, $b_i(0+) = b_i'(0+) = 0$, $i = 2, 3$, $B_4 = \{0\} \times (0, \delta)$, $B_5 = (-\delta, 0) \times \{0\}$, $B_6 = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = b_6(\varepsilon_1)\}$, $b_6 \in C^1((-\delta, 0), (-\delta, 0))$, $b_6(0-) = b_6'(0-) = 0$, $B_7 = \{0\} \times (-\delta, 0)$, E_j – связная компонента $E \setminus \bigcup_{j=0}^7 B_j$, в границу которой входят B_j и B_{j+1} (здесь $B_8 := B_1$), такое, что схемы фазовых портретов векторных полей v_ε , $\varepsilon \in E$, в U имеют вид, указанный на рисунке 2 (изображены только траектории в $U \cap \mathbf{R}_+^2$).

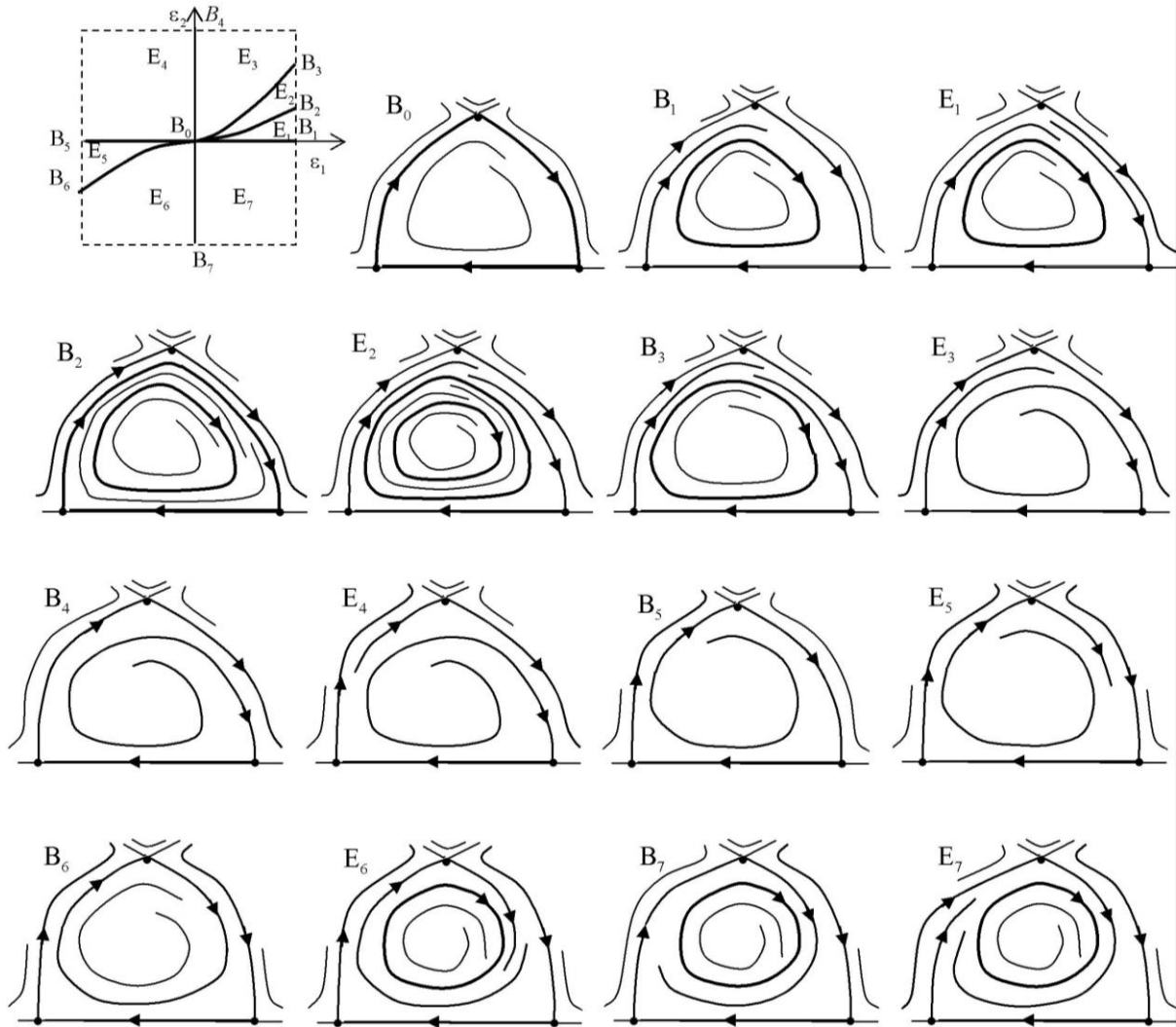


Рис. 2. Бифуркации фазовых портретов в случае $\lambda_3^0 > 1$, $\lambda_1^0 \lambda_2^0 < 1$, $\lambda_1^0 \lambda_2^0 \lambda_3^0 > 1$

Fig. 2. Bifurcations of phase portraits in the case $\lambda_3^0 > 1$, $\lambda_1^0 \lambda_2^0 < 1$, $\lambda_1^0 \lambda_2^0 \lambda_3^0 > 1$

2) В случае $\lambda_3^0 > 1$, $\lambda_1^0 \lambda_2^0 < 1$, $\lambda_1^0 \lambda_2^0 \lambda_3^0 < 1$ существует разбиение области параметров E на множества (рис. 3) $B_0 = \{(0,0)\}$, B_j , E_j , $j=1,2,\dots,7$, где $B_1 = (0, \delta) \times \{0\}$, $B_2 = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = b_2(\varepsilon_1)\}$, $b_2 \in C^1((0, \delta), (0, \delta))$, $b_2(0+) = b_2'(0+) = 0$, $B_3 = \{0\} \times (0, \delta)$, $B_4 = (-\delta, 0) \times \{0\}$, $B_i = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = b_i(\varepsilon_1)\}$, $b_i \in C^1((-\delta, 0), (-\delta, 0))$, $b_i(0-) = b_i'(0-) = 0$, $i=5,6$, $B_7 = \{0\} \times (-\delta, 0)$, E_j – связная компонента $(-\delta, \delta)^2 \setminus \bigcup_{j=0}^7 B_j$, в границу которой входят B_j и B_{j+1} (здесь $B_8 := B_1$), такое, что схемы фазовых портретов векторных полей v_ε , $\varepsilon \in E$, в U имеют вид, указанный на рисунке 3 (изображены только траектории в $U \cap \bar{\mathbf{R}}_+^2$).

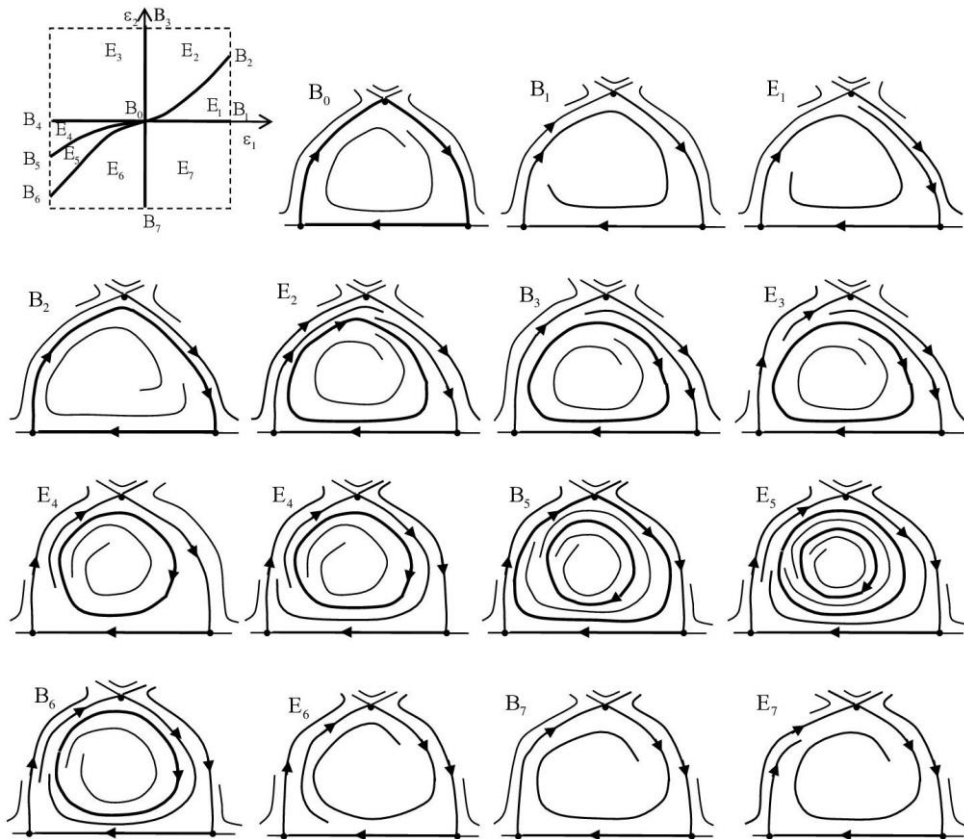


Рис. 3. Бифуркации фазовых портретов в случае $\lambda_3^0 > 1$, $\lambda_1^0 \lambda_2^0 < 1$, $\lambda_1^0 \lambda_2^0 \lambda_3^0 < 1$

Fig. 3. Bifurcations of phase portraits in the case $\lambda_3^0 > 1$, $\lambda_1^0 \lambda_2^0 < 1$, $\lambda_1^0 \lambda_2^0 \lambda_3^0 < 1$

3) В случае $\lambda_3^0 > 1$, $\lambda_1^0 \lambda_2^0 > 1$ существует разбиение области параметров E на множества (рис. 4) $B_0 = \{(0,0)\}$, B_j , E_j , $j=1,2,\dots,6$, где $B_1 = (0, \delta) \times \{0\}$, $B_2 = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = b_2(\varepsilon_1)\}$, $b_2 \in C^1(0, \delta), (-\delta, \delta)$, $b_2(0+) = b_2'(0+) = 0$, $B_3 = \{0\} \times (0, \delta)$, $B_4 = (-\delta, 0) \times \{0\}$, $B_5 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 = b_5(\varepsilon_2)\}$, $b_5 \in C^1((-\delta, 0), (-\delta, 0))$, $b_5(0-) = b_5'(0-) = 0$, $B_6 = \{0\} \times (-\delta, 0)$, E_j – связная компонента $E \setminus \bigcup_{j=0}^6 B_j$, в границу которой входят B_j и B_{j+1} (здесь $B_7 := B_1$), такое, что схемы фазовых портретов векторных полей v_ε , $\varepsilon \in E$, в U имеют вид, указанный на рисунке 4 (изображены только траектории в $U \cap \bar{\mathbf{R}}_+^2$).

Доказательство. Пусть $\lambda_3^0 > 1$, $\lambda_1^0 \lambda_2^0 < 1$, $\lambda_1^0 \lambda_2^0 \lambda_3^0 > 1$. Обозначим $\lambda_k(\varepsilon) := -\lambda_{k2}(\varepsilon) / \lambda_{k1}(\varepsilon)$ седловой индекс седла $O_k(\varepsilon)$ для $k = 1, 2$ и седла $O_{\pm}(\varepsilon)$ для $k = 3$.

Из [6, п. 13.8] следует, что при достаточно малых $u_1 > 0$, $v_1 > 0$ и $0 < \delta_1 < \min\{v_1, \delta^*\}$ определены отображение $\tau_1(u_1^+(\varepsilon) + u) \rightarrow \tau_2(u_2^+(\varepsilon) + \varphi(u, \varepsilon))$, $u \in (0, u_1)$ по траекториям поля v_ε , $\varepsilon \in (-\delta_1, \delta_1)^2$, где

$$\varphi(u, \varepsilon) = l_1(\varepsilon)u^{\lambda_3(\varepsilon)} + q_1(u, \varepsilon), \quad l_1(\cdot) \in C^1, \quad l_1(\varepsilon) > 0, \quad (2)$$

$$|\partial^i q_1(u, \varepsilon) / \partial u^i| \leq u^{\lambda_3(\varepsilon) - i + \alpha_1}, \quad |\partial q_1(u, \varepsilon) / \partial \varepsilon_j| \leq u^{\lambda_3(\varepsilon) + \alpha_1} \quad \text{при } 0 < \alpha_1 < 1, \quad i = 0, 1, 2, \quad j = 1, 2, \quad (3)$$

и отображение

$$\tau_1(u_1(\varepsilon) + v) \rightarrow \tau_2(u_2(\varepsilon) + \hat{\psi}(v, \varepsilon)), \quad v \in (0, v_1) \quad (4)$$

по траекториям поля $-v_\varepsilon$, $\varepsilon \in (-\delta_1, \delta_1)^2$, где

$$\hat{\psi}(v, \varepsilon) = l_2(\varepsilon)v^{\gamma(\varepsilon)} + q_2(v, \varepsilon), \quad \gamma(\varepsilon) = 1/(\lambda_1(\varepsilon)\lambda_2(\varepsilon)), \quad l_2(\cdot) \in C^1, \quad l_2(\varepsilon) > 0, \quad (5)$$

$$|\partial^i q_2(v, \varepsilon) / \partial v^i| \leq v^{\gamma(\varepsilon) - i + \alpha_2}, \quad |\partial q_2(v, \varepsilon) / \partial \varepsilon_j| \leq v^{\gamma(\varepsilon) + \alpha_2} \quad \text{при } 0 < \alpha_2 < 1, \quad i = 0, 1, 2, \quad j = 1, 2. \quad (6)$$

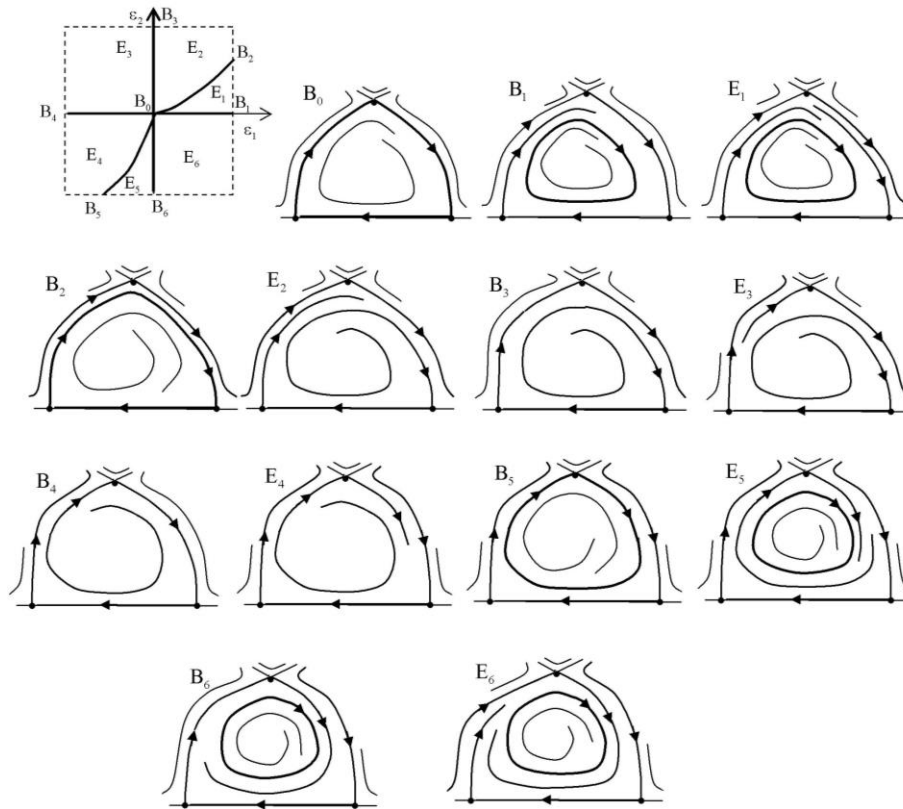


Рис. 4. Бифуркации фазовых портретов в случае $\lambda_3^0 > 1$, $\lambda_1^0 \lambda_2^0 > 1$

Fig. 4. Bifurcations of phase portraits in the case $\lambda_3^0 > 1$, $\lambda_1^0 \lambda_2^0 > 1$

Ввиду (1) отображение (4) можно записать в виде $\tau_1(u_1^+(\varepsilon) + u) \rightarrow \tau_2(u_2^+(\varepsilon) + \psi(u, \varepsilon))$, где

$$\psi(u, \varepsilon) = \varepsilon_2 + \hat{\psi}(u - \varepsilon_1, \varepsilon), \quad u \in (\varepsilon_1, v_1 - \varepsilon_1). \quad (7)$$

Доопределим функции $\varphi(u, \varepsilon)$ и $\psi(u, \varepsilon)$, положив

$$\varphi(0, \varepsilon) = 0, \quad \psi(\varepsilon_1, \varepsilon) = \varepsilon_2. \quad (8)$$

Вследствие (5)–(7) можно считать, что при выбранных v_1 и δ_1 $\psi'_u(u, \varepsilon) > 0$ для $u \in (\varepsilon_1, v_1 - \varepsilon_1)$, и потому функция $\psi(\cdot, \varepsilon)$ имеет обратную, которую обозначим $\psi^{-1}(\cdot, \varepsilon)$. Введем функцию расхождения $d(u, \varepsilon) := \psi(u, \varepsilon) - \varphi(u, \varepsilon)$, определенную на множестве

$$\{(u, \varepsilon) : u \in [0, u_+), \varepsilon \in (-\delta_1, 0] \times (-\delta_1, \delta_1) \vee u \in [\varepsilon_1, u_+), \varepsilon \in (0, \delta_1) \times (-\delta_1, \delta_1)\},$$

где $u_+ = \min\{v_1 - \delta, u_1\}$, и функцию последования $P(\cdot, \varepsilon) := \psi^{-1}(\varphi(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$.

Поле v_ε имеет замкнутую траекторию, проходящую через точку $\tau_1(u_1^+(\varepsilon) + u_*)$, где $u_* \in (\varepsilon_1, u_+)$, если $\varepsilon \in (0, \delta_1) \times (-\delta_1, \delta_1)$, $u_* \in (0, u_+)$, если $\varepsilon \in (-\delta_1, 0] \times (-\delta_1, \delta_1)$, тогда и только тогда, когда u_* – неподвижная точка функции последования $P(u_*, \varepsilon) = u_*$ и нуль функции расхождения $d(u_*, \varepsilon) = 0$. Если $d'_u(u_*, \varepsilon) > 0$ ($d'_u(u_*, \varepsilon) < 0$), то $P'_u(u_*, \varepsilon) < 1$ ($P'_u(u_*, \varepsilon) > 1$) и замкнутая траектория является грубым устойчивым (неустойчивым) предельным циклом; если $d'_u(u_*, \varepsilon) = 0$, $d''_{uu}(u_*, \varepsilon) \neq 0$, то $P'_u(u_*, \varepsilon) = 1$, $P''_{uu}(u_*, \varepsilon) \neq 0$, и замкнутая траектория является двойным циклом.

Так как $\lambda_1^0 \lambda_2^0 < 1$, $\lambda_1^0 \lambda_2^0 \lambda_3^0 > 1$, то $\gamma(0) = 1/(\lambda_1^0 \lambda_2^0) > 1$, $\gamma(0) < \lambda_3(0)$. Из (4)–(7) получаем $d(u, 0) = l_2(0)u^{\gamma(0)} + o(u^{\gamma(0)})$, $d'_{\varepsilon_2}(u, 0) = 1 + o(u)$, и потому при некотором $\bar{u} \in (0, u_+)$ $d(u, 0) > 0$, для $u \in (0, \bar{u}]$, $d'_{\varepsilon_2}(u, 0) \geq 1/2$ для $u \in [0, \bar{u}]$. Но тогда существует число $0 < \delta < \min\{\delta_1, \bar{u}/2\}$ такое, что

$$d(\bar{u}, \varepsilon) > 0 \text{ для всех } \varepsilon \in (-\delta, \delta)^2, \quad (9)$$

$$d'_{\varepsilon_2}(u, \varepsilon) > 0, \text{ если } \varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, \delta), u \in (\varepsilon_1, \bar{u}] \text{ или } \varepsilon \in (-\delta, 0] \times (-\delta, \delta), u \in (0, \bar{u}]. \quad (10)$$

Пусть сначала $\varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, \delta)$. Так как $1 < \gamma(0) < \lambda_3(0)$, то существует такое число $N > 1$, что $\Delta_1 := N(\gamma(0) - 1) - (\lambda_3(0) - 1) > 0$, $\Delta_2 := (\lambda_3(0) - 2) - N(\gamma(0) - 2) > 0$. Тогда δ можно считать выбранным так, что для всех $\varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, \delta)$

$$1 < \gamma(\varepsilon) < \lambda_3(\varepsilon), \lambda_3(\varepsilon) - \gamma(\varepsilon) > \Delta := (\lambda_3(0) - \gamma(0))/2, \quad (11)$$

$$N(\gamma(\varepsilon) - 1) - (\lambda_3(\varepsilon) - 1) \geq \Delta_1/2, (\lambda_3(\varepsilon) - 2) - N(\gamma(\varepsilon) - 2) \geq \Delta_2/2. \quad (12)$$

Пусть $u_L(\varepsilon) := \varepsilon_1 + \varepsilon_1^N$, $u_R(\varepsilon) := 2\varepsilon_1$. Для них $\varepsilon_1 < u_L(\varepsilon) < u_R(\varepsilon) < \bar{u}$ при $\varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, \delta)$.

Покажем, что \bar{u} и δ можно выбрать так, что

$$d'_u(u, \varepsilon) < 0, \text{ если } u \in (\varepsilon_1, u_L(\varepsilon)], d'_u(u, \varepsilon) > 0, \text{ если } u \in [u_R(\varepsilon), \bar{u}], \quad (13)$$

$$d''_{uu}(u, \varepsilon) > 0, \text{ если } u \in [u_L(\varepsilon), u_R(\varepsilon)]. \quad (14)$$

Действительно, считая \bar{u} и δ достаточно малым, из (2), (3), (5)–(7), (11) и (12) получаем:

для $u \in [u_R(\varepsilon), \bar{u}]$ $\varphi'_u(u, \varepsilon) \leq 2l_1(0)u^{\lambda_3(\varepsilon)-1}$, $\psi'_u(u, \varepsilon) \geq 0,5l_2(0)(u/2)^{\gamma(\varepsilon)-1}$, и потому

$$d'_u(u, \varepsilon) \geq \left(\frac{u}{2}\right)^{\gamma(\varepsilon)-1} (0,5l_2(0) - 2^{\gamma(\varepsilon)} l_1(0)\bar{u}^{-(\lambda_3(\varepsilon)-\gamma(\varepsilon))}) > \left(\frac{u}{2}\right)^{\gamma(\varepsilon)-1} (0,5l_2(0) - 2^{\lambda_3(0)} l_1(0)\bar{u}^{-\Delta}) > 0;$$

для $u \in (\varepsilon_1, u_L(\varepsilon)]$ $\varphi'_u(u, \varepsilon) \geq 0,5l_1(0)\varepsilon_1^{\lambda_3(\varepsilon)-1}$, $\psi'_u(u, \varepsilon) \leq 2l_2(0)\varepsilon_1^{N(\gamma(\varepsilon)-1)}$, и потому

$$d'_u(u, \varepsilon) \leq \varepsilon_1^{\lambda_3(\varepsilon)-1} (2l_2(0)\varepsilon_1^{N(\gamma(\varepsilon)-1)-(\lambda_3(\varepsilon)-1)} - 0,5l_1(0)) < (2l_2(0)\delta^{\Delta_1/2} - 0,5l_1(0)) < 0;$$

для $u \in [u_L(\varepsilon), u_R(\varepsilon)]$ в случае $\gamma(\varepsilon) \geq 2$ $\varphi''_{uu}(u, \varepsilon) \leq 2^{\lambda_3(0)} l_1(0)\varepsilon_1^{\lambda_3(\varepsilon)-2}$, $\psi''_{uu}(u, \varepsilon) \geq 0$,

$5l_2(0)\varepsilon_1^{N(\gamma(\varepsilon)-2)}$, и потому

$$d''_{uu}(u, \varepsilon) \geq \varepsilon_1^{N(\gamma(\varepsilon)-2)}(0, 5l_2(0) - 2^{\lambda_3(0)}l_1(0)\varepsilon_1^{(\lambda_3(\varepsilon)-2)-N(\gamma(\varepsilon)-2)}) > \varepsilon_1^{N(\gamma(\varepsilon)-2)}(0, 5l_2(0) - 2^{\lambda_3(0)}l_1(0)\delta^{\Delta_2/2}) > 0;$$

в случае $\gamma(\varepsilon) < 2 \leq \lambda_3(\varepsilon)$ $\varphi''_{uu}(u, \varepsilon) \leq 2^{\lambda_3(0)}l_1(0)\varepsilon_1^{\lambda_3(\varepsilon)-2}$, $\psi''_{uu}(u, \varepsilon) \geq 0, 5l_2(0)\varepsilon_1^{\gamma(\varepsilon)-2}$, и потому

$$d''_{uu}(u, \varepsilon) \geq \varepsilon_1^{\gamma(\varepsilon)-2}(0, 5l_2(0) - 2^{\lambda_3(0)}l_1(0)\varepsilon_1^{\lambda_3(\varepsilon)-\gamma(\varepsilon)}) > \varepsilon_1^{\gamma(\varepsilon)-2}(0, 5l_2(0) - 2^{\lambda_3(0)}l_1(0)\delta^\Delta) > 0;$$

в случае $\lambda_3(\varepsilon) < 2$ $\varphi''_{uu}(u, \varepsilon) \leq 2l_1(0)\varepsilon_1^{\lambda_3(\varepsilon)-2}$, $\psi''_{uu}(u, \varepsilon) \geq 0, 5l_2(0)\varepsilon_1^{\gamma(\varepsilon)-2}$, и потому

$$d''_{uu}(u, \varepsilon) \geq \varepsilon_1^{\gamma(\varepsilon)-2}(0, 5l_2(0) - l_1(0)\delta^\Delta) > 0.$$

Из (13) и (14) получаем, что для любого $\varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, \delta)$ функция $d(\cdot, \varepsilon)$ имеет точку минимума

$$u_m(\varepsilon) \in (u_L(\varepsilon), u_R(\varepsilon)), \tag{15}$$

где $u_m(\cdot) \in C^1$, и

$$\operatorname{sgn} d'_u(u, \varepsilon) = \operatorname{sgn}(u - u_m(\varepsilon)) \text{ для всех } u \in (\varepsilon_1, \bar{u}]. \tag{16}$$

Из (8) следует, что $\psi(\varepsilon_1, \varepsilon) = 0$ при $\varepsilon_2 = 0$, и потому

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon_2=0} < 0 \text{ для всех } \varepsilon_1 \in (0, \delta). \tag{17}$$

Ввиду (2), (3), (5)–(7) и (15) $d(u_m(\varepsilon), \varepsilon) \Big|_{\varepsilon_2=\varepsilon_1} = \varepsilon_1 + o(\varepsilon_1)$. Поэтому можно считать

$$d(u_m(\varepsilon), \varepsilon) \Big|_{\varepsilon_2=\varepsilon_1} > 0 \text{ для всех } \varepsilon_1 \in (0, \delta), \tag{18}$$

и, тем более,

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon_2=\varepsilon_1} > 0 \text{ для всех } \varepsilon_1 \in (0, \delta). \tag{19}$$

Из (17), (19), (10), из теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции и теоремы о неявной функции имеем для любого $\varepsilon_1 \in (0, \delta)$ такое число $b_2(\varepsilon) \in (0, \varepsilon_1)$, что

$$\operatorname{sgn} d(\varepsilon_1, \varepsilon) = \operatorname{sgn}(\varepsilon_2 - b_2(\varepsilon_1)) \text{ для всех } \varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, \delta), \tag{20}$$

при этом $b_1(\cdot) \in C^1$,

$$b'_1(\varepsilon_1) = - \frac{d'_u(\varepsilon_1, \varepsilon) + d'_{\varepsilon_1}(\varepsilon_1, \varepsilon)}{d'_{\varepsilon_2}(\varepsilon_1, \varepsilon)} \Big|_{\varepsilon_2=b_1(\varepsilon_1)}. \tag{21}$$

Вследствие (2), (3), (5)–(7) $d'_u(0, 0) = 0$, $d'_{\varepsilon_1}(0, 0) = 0$. Поскольку $b_2(0+) = 0$, то из (21) получаем $b'_2(0+) = 0$.

Из (10) и (16) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} d(u_m(\varepsilon), \varepsilon) = d'_{\varepsilon_2}(u, \varepsilon) \Big|_{u=u_m(\varepsilon)} > 0 \text{ для всех } \varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, \delta). \tag{22}$$

Ввиду (17) и (21) $d(u_m(\varepsilon), \varepsilon) \Big|_{\varepsilon_2=b_1(\varepsilon_1)} < 0$ для всех $\varepsilon_1 \in (0, \delta)$. Отсюда из (18) и (22) получаем, что для любого $\varepsilon_1 \in (0, \delta)$ существует такое число $b_3(\varepsilon) \in (b_2(\varepsilon), \varepsilon_1)$, что

$$\operatorname{sgn} d(u_m(\varepsilon), \varepsilon) = \operatorname{sgn}(\varepsilon_2 - b_3(\varepsilon_1)) \text{ для всех } \varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, \delta), \tag{23}$$

при этом $b_3(\cdot) \in C^1$, $b_3(0+) = b'_3(0+) = 0$.

Пусть теперь $\varepsilon \in (-\delta, 0) \times (-\delta, \delta)$. Мы можем считать, что

$$d'_u(u, \varepsilon) > 0 \text{ для всех } u \in (0, \bar{u}]. \tag{24}$$

Действительно, предполагая \bar{u} достаточно малым, из (2), (3), (5)–(7) и (11) по-

лучаем

$$\varphi'_u(u, \varepsilon) \leq 2l_1(0)u^{\lambda_3(\varepsilon)-1}, \quad \psi'_u(u, \varepsilon) \geq 0, \quad 5l_2(0)(u - \varepsilon_1)^{\gamma(\varepsilon)-1} > 0, \quad 5l_2(0)u^{\gamma(\varepsilon)-1},$$

и потому $d'_u(u, \varepsilon) \geq u^{\gamma(\varepsilon)-1}(0, 5l_2(0) - 2l_1(0)\bar{u}^\Delta) > 0$.

Ввиду (2), (3) и (7) $d(0, \varepsilon) = \varepsilon_2 + \hat{\psi}(-\varepsilon_1, \varepsilon)$. Поэтому $d(0, \varepsilon)|_{\varepsilon_2=0} > 0$. Вследствие (5) и (6) $d(0, \varepsilon)|_{\varepsilon_2=\varepsilon_1} = \varepsilon_1 + o(\varepsilon_1)$ и можно считать, что $d(0, \varepsilon)|_{\varepsilon_2=\varepsilon_1} < 0$ для всех $\varepsilon_1 \in (-\delta, 0)$. Из этих двух неравенств и из (10) получаем, что для любого $\varepsilon_1 \in (-\delta, 0)$ существует такое число $b_6(\varepsilon_1) \in (\varepsilon_1, 0)$, что

$$\operatorname{sgn} d(0, \varepsilon) = \operatorname{sgn}(\varepsilon_2 - b_6(\varepsilon_1)) \quad \text{для всех } \varepsilon \in (-\delta, 0) \times (-\delta, \delta), \quad (25)$$

при этом $b_6(\cdot) \in C^1$, $b_6(0+) = b'_6(0+) = 0$.

Ясно, что

$$\operatorname{sgn} d(0, \varepsilon) = \operatorname{sgn} \varepsilon_2 \quad \text{для всех } \varepsilon \in \{0\} \times (-\delta, \delta). \quad (26)$$

Окрестность U полицикла Γ строится аналогично [3] так, что при достаточно малом δ замкнутая траектория поля v_ε лежит в $U \cap \mathbf{R}_+^2$ тогда и только тогда, когда она проходит через точку $\tau_1(u_1^+(\varepsilon) + u_*)$, где $u_* \in (\varepsilon_1, \bar{u})$, если $\varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, \delta)$, и $u_* \in (0, \bar{u})$, если $\varepsilon \in (-\delta, 0] \times (-\delta, \delta)$, а $O_1(\varepsilon)$, $O_2(\varepsilon)$ и $O_\pm(\varepsilon)$ – все особые точки, принадлежащие U .

Теперь определим множества V_k и E_k так, как они описаны в формулировке теоремы.

Вследствие (9), (16), (20), (23), (25) и (26) функция $d(\cdot, \varepsilon)$ имеет только следующие нули: при $\varepsilon \in E_7 \cup V_1 \cup E_1$ единственный нуль $u_+(\varepsilon) \in (\varepsilon_1, \bar{u})$, в котором $d'_u(u_+(\varepsilon), \varepsilon) > 0$; при $\varepsilon \in V_2$ два нуля: $u = \varepsilon_1$ в котором $d'_u(\varepsilon_1, \varepsilon) > 0$ и $u_+(\varepsilon) \in (\varepsilon_1, \bar{u})$, в котором $d'_u(u_+(\varepsilon), \varepsilon) > 0$; при $\varepsilon \in E_2$ два нуля: $u_-(\varepsilon) \in (0, u_L(\varepsilon))$, в котором $d'_u(u_-(\varepsilon), \varepsilon) < 0$, и $u_+(\varepsilon) \in (u_R(\varepsilon), \bar{u})$, в котором $d'_u(u_+(\varepsilon), \varepsilon) > 0$; при $\varepsilon \in V_3$ двукратный нуль; при $\varepsilon \in E_6 \cup V_7$ единственный нуль $u_+(\varepsilon) \in (0, \bar{u})$, в котором $d'_u(u_+(\varepsilon), \varepsilon) > 0$; при $\varepsilon \in V_0 \cup V_6$ единственный нуль $u = 0$, в котором $d'_u(0, \varepsilon) > 0$.

Поэтому в $U \cap \bar{\mathbf{R}}_+^2$ имеются только следующие замкнутые траектории и сепаратрисные контуры: при $\varepsilon \in V_0$ устойчивый контур Γ^+ ; при $\varepsilon \in E_6 \cup V_7 \cup E_7 \cup V_1 \cup E_1$ устойчивый грубый цикл; при $\varepsilon \in V_2$ устойчивую петлю сепаратрисы седла $O_+(\varepsilon)$, образованную совпадающими сепаратрисами $L_1^+(\varepsilon) = L_2^+(\varepsilon)$; при $\varepsilon \in E_2$ два грубых цикла – устойчивый и неустойчивый; при $\varepsilon \in V_3$ двойной цикл; при $\varepsilon \in V_6$ устойчивый контур, образованный седлами $O_1(\varepsilon)$, $O_2(\varepsilon)$, дугой Fix между ними и совпадающими сепаратрисами $L_1(\varepsilon) = L_2(\varepsilon)$.

Кроме того, при $\varepsilon \in V_1 \cup V_5$ ($\varepsilon \in V_4 \cup V_7$) совпадают сепаратрисы $L_1(\varepsilon)$ и $L_1^+(\varepsilon)$ ($L_2(\varepsilon)$ и $L_2^+(\varepsilon)$).

Таким образом, в случае $\lambda_3^0 > 1$, $\lambda_1^0 \lambda_2^0 < 1$, $\lambda_1^0 \lambda_2^0 \lambda_3^0 > 1$ все перестройки фазовых портретов в окрестности U имеют вид, описанный на рисунке 2.

Доказательства в случаях $\lambda_3^0 > 1$, $\lambda_1^0 \lambda_2^0 < 1$, $\lambda_1^0 \lambda_2^0 \lambda_3^0 < 1$ и $\lambda_3^0 > 1$, $\lambda_1^0 \lambda_2^0 > 1$ аналогичны.

Примечания

1. Golubitsky M., Shaeffer D., Stewart I. Singularities and Groups in Bifurcation Theory. Springer-Verlag, 1988. 556 p.
2. Жолондек Х. О версальности одного семейства симметричных векторных полей на плоскости // Математический сборник. 1983. Т. 120, № 4. С. 473–499. DOI: 10.1070/SM1984v048n02ABEH002686
3. Ройтенберг В. Ш. О некоторых нелокальных бифуркациях в однопараметрических семействах симметричных векторных полей на плоскости // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование : межвуз. сб. науч. тр. / отв. ред. С. С. Мамонов. Рязань : Ряз. гос. ун-т им. С. А. Есенина, 2024. Вып. 5. С. 120–125. DOI: 10.37724/RSU.2024.89.50.026
4. Ройтенберг В. Ш. О бифуркациях сепаратрисных контуров векторных полей на плоскости с инволютивной симметрией // Прикладная математика & Физика. 2024. Т. 56, № 1. С. 5–12. DOI: 10.52575/2687-0959-2024-56-1-5-12
5. Ройтенберг В. Ш. О нелокальных бифуркациях в двухпараметрических семействах векторных полей на плоскости с инволютивной симметрией // Известия вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 1. С. 51–63. DOI: 10.21685/2072-3040-2024-1-5
6. Методы качественной теории в нелинейной динамике / Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа. Москва ; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. Ч. 2. 548 с.

References

1. Golubitsky M., Shaeffer D., Stewart I. Singularities and Groups in Bifurcation Theory. Springer-Verlag, 1988. 556 p.
2. Zholondek Kh. On the versality of a family of symmetric vector fields in the plane // Mathematics of the USSR-Sbornik. 1984. Vol. 48, Issue 2. P. 463–492. DOI: 10.1070/SM1984v048n02ABEH002686
3. Roytenberg V. Sh. On some nonlocal bifurcations in one-parameter families of symmetric vector fields on the plane // Differential equations and mathematical modeling : collection of scientific papers / ed. S. S. Mamonov. Ryazan : S. A. Yesenin Ryazan State University, 2024. Iss. 5. P. 120–125. DOI: 10.37724/RSU.2024.89.50.026
4. Roytenberg V. Sh. On bifurcation of separatrix contours of planar vector fields with involutive symmetry // Applied Mathematics & Physics. 2024. Vol. 56, No. 1. P. 5–12. DOI: 10.52575/2687-0959-2024-56-1-5-12
5. Roytenberg V. Sh. On nonlocal bifurcations in two-parameter families of vector fields on the plane with involutive symmetry // University Proceedings. Volga Region. Physical and Mathematical Sciences. 2024. No. 1. P. 51–63. DOI: 10.21685/2072-3040-2024-1-5
6. Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics // L. P. Shilnikov, A. L. Shilnikov, D. V. Turaev, L. Chua. Moscow ; Izhevsk : SIC “Regular and Chaotic Dynamics”, 2009. Part 2. 548 p.

Статья поступила в редакцию 21.07.2024; одобрена после рецензирования 01.08.2024; принята к публикации 02.08.2024.

The article was submitted 21.07.2024; approved after reviewing 01.08.2024; accepted for publication 02.08.2024.

© В. Ш. Ройтенберг, 2024