Обзорная статья
УДК 517.926
ББК 22.161.616
У 95
DOI: 10.53598/2410-3225-2024-3-346-21-28

Контактная кривая и предельные циклы плоских полиномиальных векторных полей

(*Рецензирована*)

Дамир Салихович Ушхо

Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия, damirubych@mail.ru

Аннотация. *Построен класс плоских полиномиальных дифференциальных систем с полиномами степени $2n-1$ в правых частях, для которых n эллипсов, вложенных один в другой, являются контактными кривыми. Для этих систем найдены условия существования, по крайней мере, $n-1$ предельных циклов, окружающих «наименьший эллипс».*

Ключевые слова: *контактная кривая, семейство эллипсов, предельный цикл, полиномиальное векторное поле*

Для цитирования: *Ушхо Д. С. Контактная кривая и предельные циклы плоских полиномиальных векторных полей // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. : Естественно-математические и технические науки. 2024. Вып. 3 (346). С. 21–28. DOI: 10.53598/2410-3225-2024-3-346-21-28*

Review Article

Contact curve and limit cycles of planar polynomial vector fields

Damir S. Ushkho

Adyghe State University, Maykop, Russia, damirubych@mail.ru

Abstract. *A class of planar polynomial differential systems with polynomials of degree $2n-1$ in the right-hand sides for which n ellipses nested one into another are contact curves is constructed. For these systems the conditions for the existence of at least limit cycles surrounding the “smallest ellipse” are found.*

Keywords: *contact curve, family of ellipses, limit cycle, polynomial vector field*

For citation: *Ushkho D. S. Contact curve and limit cycles of planar polynomial vector fields // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser. : Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2024. Iss. 3 (346). P. 21–28. DOI: 10.53598/2410-3225-2024-3-346-21-28*

Одной из приоритетных тем в качественной теории динамических систем второго порядка является тема, связанная с изучением изолированных периодических решений систем нелинейных колебаний. Так, в работе [1] доказана

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

а) $y\psi(y) \geq 0, \psi(0) = 0$;

б) уравнение $F(x, y) = 0$ *определяет конечное (счетное) множество замкнутых кривых, окружающих начало координат и допускающих отделение друг от друга окружностями с центром в начале координат*;

в) знак функции $F(x, y)$ *меняется на противоположный при переходе через каждую ветвь кривой* $F(x, y) = 0$.

Тогда система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \psi(y)F(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

где $\psi(y), \psi'(y), F_x'(x,y), F_y'(x,y)$ *непрерывны, имеет, по крайней мере, конечное (счетное) множество предельных циклов, окружающих единственное состояние равновесия* $O(0,0)$.

Идейной основой доказательства теоремы 1 является известный принцип кольца (см., например, [2]).

Конкретизацией теоремы 1 является

Теорема 2 [3]. *Если выполнены условия:*

$$\max\left\{\sqrt{-\frac{c_i}{d_i}}, \left|\frac{-b_i \pm \sqrt{b_i^2 - a_i c_i}}{a_i}\right|\right\} \le \min\left\{\sqrt{-\frac{c_{i+1}}{d_{i+1}}}, \left|\frac{-b_{i+1} \pm \sqrt{b_{i+1}^2 - a_{i+1} c_{i+1}}}{a_{i+1}}\right|\right\}, \ (i = \overline{1, n-1}),$$

$$sign a_i = sign d_i = -sign c_i = sign(d_i - a_i), \ a_i d_i c_i \ne 0, \ (i = \overline{1, n}),$$

то система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y\prod_{i=1}^{n}(a_i x^2 + d_i y^2 + 2b_i x c_i) \end{cases} \tag{2}$$

имеет, по крайней мере, n *предельных циклов, окружающих единственное состояние равновесия* $O(0,0)$.

В монографии [4] отмечено, что топографическая система Пуанкаре и связанная с ней контактная кривая могут служить инструментом для обнаружения предельных циклов.

Под топографической системой следует понимать систему простых замкнутых гладких непересекающихся кривых $F(x, y) = c$, вложенных одна в другую и заполняющих некоторую двусвязную область [4].

Производная функции $F(x, y)$ в силу системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y) \end{cases} \tag{3}$$

определяется по формуле

$$\frac{dF}{dt} = F_x'(x,y)P(x,y) + F_y'(x,y)Q(x,y) \equiv \Phi(x,y). \tag{4}$$

Кривую $\Phi(x, y) = 0$ принято называть контактной кривой [4], так как в точках этой кривой, отличных от состояний равновесия, траектории системы (3) касаются кривых топографической системы.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P_{2n-1}(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q_{2n-1}(x,y), \end{cases} \tag{5}$$

где $P_{2n-1}(x,y), Q_{2n-1}(x,y)$ $(n \geq 2)$ – взаимно простые многочлены степени $2n-1$ над полем R.

Замечание 1. Всюду в данной статье считаются правые части рассматриваемых систем взаимно простыми многочленами над полем R.

Пусть $\{l_i\}_{i=1}^{n}$ – семейство эллипсов $l_i : \omega_i(x,y) = 0.$ Условимся понимать под символической записью $l_i \subset l_j$ тот факт, что эллипс l_i расположен внутри эллипса l_j.

Будем говорить, что семейство эллипсов $\{l_i\}_{i=1}^{n}$ обладает свойством (A), если выполнены условия:

A_1) $\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ из неравенства $i < j$ следует, что $l_i \subset l_j$, и система уравнений $\begin{cases} \omega_i(x,y) = 0, \\ \omega_j(x,y) = 0 \end{cases}$ несовместна;

A_2) в открытой двусвязной области, ограниченной эллипсами l_i *и* $l_{i+1}, i = \overline{1, n-1},$ расположена окружность семейства

$$F(x,y) \equiv x^2 + y^2 = c. \tag{6}$$

Замечание 2. Кривую, заданную уравнением $rx^2 + ly^2 = 0,$ $rl > 0$, будем называть также эллипсом (вырожденным).

Предположим, что эллипсы семейства $\{l_i\}_{i=1}^{n}$, удовлетворяющего условию A_1, являются кривыми контактов траекторий системы (5) с окружностями топографической системы (6) при выполнении условия $\omega_1(0,0) = 0.$ Тогда имеет место равенство:

$$xP_{2n-1}(x,y) + yQ_{2n-1}(x,y) \equiv \alpha\omega_1(x,y)\cdot\omega_2(x,y)\cdot...\cdot\omega_n(x,y), \ \alpha \in R \setminus \{0\}. \tag{7}$$

При $x = 0$ из (7) получаем соотношение

$$yQ_{2n-1}(0,y) \equiv \alpha\omega_1(0,y)\cdot\omega_2(0,y)\cdot...\cdot\omega_n(0,y). \tag{8}$$

Так как $\omega_1(0,0) = 0$, то в силу условия A_1) $\omega_1(0,y) \equiv yR_1(y)$ (9), где $R_1(y)$ – линейная функция. Из (8) и (9) следует, что

$$Q_{2n-1}(x,y) \equiv \alpha R_1(y)\omega_2(x,y)\cdot...\cdot\omega_n(x,y) + xG_{2n-2}(x,y), \tag{10}$$

где $G_{2n-2}(x,y)$ – многочлен степени не выше $2n-2$.

С учетом (10) запишем тождество (7):

$$xP_{2n-1}(x,y) + \alpha yR_1(y)\omega_2(x,y)\cdot...\cdot\omega_n(x,y) + xyG_{2n-2}(x,y) \equiv \alpha\omega_1(x,y)\cdot\omega_2(x,y)\cdot...\cdot\omega_n(x,y). \tag{11}$$

Перепишем (11) в виде:

$$xP_{2n-1}(x,y) \equiv -xyG_{2n-2}(x,y) + \alpha\omega_2(x,y)\cdot...\cdot\omega_n(x,y)(\omega_1(x,y) - yR_1(y)). \tag{12}$$

Из (12) по необходимости следует, что

$$\omega_1(x,y) \equiv xS_1(x) + yR_1(y), \tag{13}$$

где $S_1(x)$ – линейная функция. Из (12) и (13) следует:

$$P_{2n-1}(x,y) \equiv -yG_{2n-2}(x,y) + \alpha S_1(x)\omega_2(x,y)\cdot\ldots\cdot\omega_n(x,y). \tag{14}$$

С учетом (10) и (14) система (5) запишется в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -yG_{2n-2}(x,y) + \alpha S_1(x)\omega_2(x,y)\cdot\ldots\cdot\omega_n(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = xG_{2n-2}(x,y) + \alpha R_1(y)\omega_2(x,y)\cdot\ldots\cdot\omega_n(x,y). \end{cases} \tag{15}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Эллипсы семейства* $\{l_i\}_{i=1}^n$, *удовлетворяющего условию* A_1, *являются кривыми контактов траекторий системы* (5) *с окружностями топографической системы* (6) *при условии, что эллипс* $\omega_1(x,y)=0$ *проходит через начало координат* $O(0,0)$, *тогда и только тогда, когда система* (5) *имеет вид* (15).

Замечание 3. Всюду в дальнейшем будем считать, что $G_{2n-2}(x,y)\equiv d$, $d\in R\setminus\{0\}$ или что кривая $G_{2n-2}(x,y)=0$ не имеет действительных ветвей, или ограничена, а именно расположена внутри эллипса $\omega_2(x,y)=0$.

Пусть $S_1(x)\equiv \beta x+\gamma$, $R_1(y)\equiv \delta y+\eta$, где $\beta\delta>0$. (*)

Тогда $O(0,0)$ – единственное состояние равновесия системы (15) тогда и только тогда, когда $\gamma=\eta=0$.

Далее, рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -yG_{2n-2}(x,y) + \overline{\beta} x\omega_2(x,y)\cdot\ldots\cdot\omega_n(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = xG_{2n-2}(x,y) + \overline{\delta} y\omega_2(x,y)\cdot\ldots\cdot\omega_n(x,y), \end{cases} \tag{16}$$

где $\overline{\beta}=\alpha\beta, \overline{\delta}=\alpha\delta$.

Система (16) получена из системы (15) при $\gamma=\eta=0$. Следует заметить, что в системе (16) выполняется неравенство $|\overline{\delta}|+|\overline{\beta}|>0$, так как в противном случае правые части системы (16) не являются взаимно простыми.

Замечание 4. Если $G_{2n-2}(x,y)\equiv 1, \overline{\beta}=0, \overline{\delta}=1$, то из (16) получается система, рассмотренная в работе [3].

Покажем, что единственное состояние равновесия $O(0,0)$ системы (16) является простым узлом или фокусом. Для этого рассмотрим два случая: a) $G_{2n-2}(0,0)=0$; b) $G_{2n-2}(0,0)=\nu\neq 0$.

В случае a) запишем систему (16) в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax+\varphi(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = cy+\psi(x,y), \end{cases} \tag{17}$$

где

$a=\bar{\beta}e,\ c=\bar{\delta}e,\ e=\omega_2(0,0)\cdot\ldots\cdot\omega_n(0,0),\ \varphi(0,0)=\varphi'_x(0,0)=\varphi'_y(0,0)=0,\ \psi(0,0)=\psi'_x(0,0)=\psi'_y(0,0)=0.$

Следуя [4], вычислим для системы (17) величины:

$$\begin{aligned}&\sigma(0,0),\quad \Delta(0,0),\quad \sigma^2(0,0)-4\Delta(0,0),\\ &\sigma(0,0)=e(\bar{\delta}+\bar{\beta}),\ \Delta(0,0)=e^2\bar{\delta}\bar{\beta},\ \sigma^2(0,0)-4\Delta(0,0)=e^2(\bar{\beta}-\bar{\delta})^2\ge 0.\end{aligned} \tag{18}$$

Из (18) следует, что $O(0,0)$ – простой устойчивый (неустойчивый) узел, если $e(\bar{\delta}+\bar{\beta})<0(>0)$.

В случае $b)$ запишем систему (16) в виде:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\bar{\beta}ex-\nu y+\bar{\varphi}(x,y),\\ \dfrac{dy}{dt}=\nu x+\bar{\delta}ey+\bar{\psi}(x,y),\end{cases} \tag{19}$$

где $\bar{\varphi}(0,0)=\bar{\varphi}'_x(0,0)=\bar{\varphi}'_y(0,0)=0, \bar{\psi}(0,0)=\bar{\psi}'_x(0,0)=\bar{\psi}'_y(0,0)=0.$

Для системы (19) имеем величины

$$\sigma(0,0)=e(\bar{\beta}+\bar{\delta}),\ \Delta(0,0)=e^2\bar{\beta}\bar{\delta}+\nu^2,\ \sigma^2(0,0)-4\Delta(0,0)=e^2(\bar{\beta}-\bar{\delta})^2-4\nu^2. \tag{20}$$

Из (20) следует, что $O(0,0)$ – простой устойчивый (неустойчивый) узел, если $e(\bar{\delta}+\bar{\beta})<0(>0),\ e^2(\bar{\beta}-\bar{\delta})^2-4\nu^2\ge 0$, и простой устойчивый (неустойчивый) фокус, если $e(\bar{\delta}+\bar{\beta})<0(>0), e^2(\bar{\beta}-\bar{\delta})^2-4\nu^2<0.$

Теорема 4. *Пусть $O(0,0)$ – единственное состояние равновесия системы* (16), *и семейство эллипсов $\{\omega_i(x,y)=0\}_{i=1}^n$, где $\omega_1(x,y)\equiv\bar{\beta}x^2+\bar{\delta}y^2, \bar{\beta}\bar{\delta}>0$, удовлетворяет условию A_1. Тогда при четном n существует хотя бы один предельный цикл, окружающий начало координат.*

Доказательство. Как показано выше, $O(0,0)$ – простое состояние равновесия типа «узел» или «фокус». Для определенности положим, что $O(0,0)$ – устойчивое состояние равновесия.

Введем обозначения: L_2^+ – окружность наибольшего радиуса из всех окружностей топографической системы (6), расположенных внутри эллипса $l_2:\omega_2(x,y)=0$; L_n^- – окружность наименьшего радиуса из всех окружностей топографической системы (6), внутри которых расположен эллипс $L_n:\omega_n(x,y)=0$.

В силу условия A_1 знак выражения $\prod\limits_{i=2}^{n}\omega_i(x,y)$ меняется на противоположный при переходе через каждый эллипс $\omega_i(x,y)=0, i=\overline{2,n}.$

Поскольку по предположению $O(0,0)$ – устойчивое состояние равновесия, то при $t\to+\infty$ траектории, пересекающие окружность L_2^+, входят в односвязную область, ограниченную кривой L_2^+, а траектории, пересекающие L_n^-, входят в двусвязную область, внутренней границей которой является L_n^-.

По принципу кольца [2] устойчивое состояние равновесия $O(0,0)$ системы (16) окружает хотя бы один предельный цикл (вообще говоря, нечетное число циклов).

Теорема доказана.

Пример 1. Устойчивый фокус $O(0,0)$ системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y(x^2 + 5y^2 + 2) + 2x(x^2 + 4y^2 - 2x - 3), \\ \dfrac{dy}{dt} = x(x^2 + 5y^2 + 2) + y(x^2 + 4y^2 - 2x - 3) \end{cases}$$

окружает, по крайней мере, один предельный цикл, расположенный в кольцеобразной области, ограниченной окружностями: $L_2^+ : x^2 + y^2 = \dfrac{2}{3}$ и $L_2^- : x^2 + y^2 = 9$.

Теорема 5. *Пусть* $O(0,0)$ *– единственное состояние равновесия системы* (16), *и семейство эллипсов* $\{l_i\}_{i=1}^n$, где $l_1 : \bar{\beta}x^2 + \bar{\delta}y^2 = 0,\ \bar{\beta}\bar{\delta} > 0,$ *обладает свойством* (A). *Тогда система* (16) *имеет, по крайней мере,* $n-1$ *предельных циклов, окружающих начало координат.*

Пример 2. Система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - y(x^2 + y^2) + x(x^2 + 2y^2 + 2x - 2)(16x^2 + 25y^2 - 32x - 384), \\ \dfrac{dy}{dt} = x(x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2 + 2x - 2)(16x^2 + 25y^2 - 32x - 384) \end{cases} \tag{21}$$

удовлетворяет условиям теоремы 5, поэтому неустойчивый дикритический узел $O(0,0)$ этой системы окружают хотя бы два предельных цикла.

Одной из конкретизаций теоремы 5 является

Теорема 6. Пусть система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -yG_{2n-2}(x,y) + \bar{\beta}x\prod_{i=2}^{n}(a_i x^2 + d_i y^2 + 2b_i x + c_i), \\ \dfrac{dy}{dt} = xG_{2n-2}(x,y) + \bar{\delta}y\prod_{i=2}^{n}(a_i x^2 + d_i y^2 + 2b_i x + c_i) \end{cases} \tag{22}$$

удовлетворяет условиям:

$$\max\left\{\sqrt{-\frac{c_i}{d_i}}, \left|\frac{b_i \pm \sqrt{b_i^2 - a_i c_i}}{a_i}\right|\right\} \le \min\left\{\sqrt{-\frac{c_{i+1}}{d_{i+1}}}, \left|\frac{b_{i+1} \pm \sqrt{b_{i+1}^{\ 2} - a_{i+1}c_{i+1}}}{a_{i+1}}\right|\right\},\ i = \overline{2, n-1}, \tag{23}$$
$$signa_i = signd_i = -signc_i = sign(d_i - a_i),\ a_i c_i d_i \ne 0,\ i = \overline{2,n}.$$

Тогда эта система имеет хотя бы $n-1$ предельных циклов, окружающих начало координат.

Замечание 5. Условия (23), согласно работе [3], гарантируют отделение эллипсов семейства $\prod_{i=2}^{n}(a_i x^2 + d_i y^2 + 2b_i x + c_i) = 0$ друг от друга окружностями топографической системы (6).

Пример 3. Система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - y(x^6 + y^6 + 1) + 2x(4x^2 + 6y^2 + 8x - 3)(9x^2 + 16y^2 - 18x - 135)(49x^2 + 64y^2 - 98x - 3087), \\ \dfrac{dy}{dt} = x(x^6 + y^6 + 1) + 3y(4x^2 + 6y^2 + 8x - 3)(9x^2 + 16y^2 - 18x - 135)(49x^2 + 64y^2 - 98x - 3087) \end{cases}$$

имеет хотя бы три предельных цикла, окружающих простой устойчивый узел $O(0,0)$.

Далее рассмотрим систему (15) в случае, когда семейство эллипсов $\{l_i\}_{i=1}^n$ обладает свойством (A) и состоянием равновесия не является точка $O(0,0)$. Нетрудно заметить, что любое состояние равновесия системы (15) расположено на эллипсе $l_1 : \beta x^2 + \gamma x + \delta y^2 + \eta y = 0$. При этом, не ограничивая общности, считаем выполненным условие $\alpha = 1$.

Запишем систему (15) в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -yG_{2n-2}(x,y) + \beta\left(x + \dfrac{\gamma}{\beta}\right)\omega_2(x,y)\cdot\ldots\cdot\omega_n(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = xG_{2n-2}(x,y) + \delta\left(y + \dfrac{\eta}{\delta}\right)\omega_2(x,y)\cdot\ldots\cdot\omega_n(x,y). \end{cases} \tag{24}$$

Пусть $\left(-\dfrac{\gamma}{\beta}, -\dfrac{\eta}{\delta}\right)$ – состояние равновесия системы (24), тогда, очевидно, $G_{2n-2}\left(-\dfrac{\gamma}{\beta}, -\dfrac{\eta}{\delta}\right) = 0$. В силу замечания 3 кривая $G_{2n-2}(x,y) = 0$ расположена внутри эллипса $\omega_2(x,y) = 0$. Поэтому система не имеет состояний равновесия на контактных кривых $\omega_i(x,y) = 0, i = \overline{2,n}.$ Так как существуют циклы без контакта, окружающие эллипс $\omega_1(x,y) = 0$, то сумма индексов Пуанкаре состояний равновесия системы (24) равна +1 [4]. Таким образом, имеет место

Теорема 7. *Пусть эллипсы семейства* $\{l_i\}_{i=1}^n$, *где* $l_1 : \beta x^2 + \gamma x + \delta y^2 + \eta y = 0,$ *удовлетворяют условию* (A) *и являются кривыми контактов траекторий системы* (24) *с окружностями топографической системы* (6). *Тогда эта система имеет, по крайней мере,* $n-1$ *предельных циклов вокруг эллипса* l_1.

Пример 4. Для системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y(x^2+y^2-0{,}16) + \left(x - \dfrac{\sqrt{2}}{5}\right)(25x^2+9y^2-225)(36x^2+49y^2-1764), \\ \dfrac{dy}{dt} = x(x^2+y^2-0{,}16) + \left(y - \dfrac{\sqrt{2}}{5}\right)(25x^2+9y^2-225)(36x^2+49y^2-1764) \end{cases} \tag{25}$$

кривая $\left(x^2 - \dfrac{\sqrt{2}}{5}x + y^2 - \dfrac{\sqrt{2}}{5}y\right)(25x^2+9y^2-225)(36x^2+49y^2-1764) = 0$ является контактной. По теореме 7 эллипс $x^2 - \dfrac{\sqrt{2}}{5}x + y^2 - \dfrac{\sqrt{2}}{5}y = 0$ окружают, по крайней мере, два предельных цикла.

Пример 5. Хотя бы один предельный цикл системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y(x^2+y^2-4) + (11-2\sqrt{2})(x-\sqrt{2})((x-1)^2+y^2-16), \\ \dfrac{dy}{dt} = x(x^2+y^2-4) + \dfrac{(44-8\sqrt{2})}{117}(y-\sqrt{2})((x-1)^2+y^2-16) \end{cases} \tag{26}$$

окружает эллипс $l: (11-2\sqrt{2})(x^2-\sqrt{2}x)+\dfrac{(44-8\sqrt{2})}{117}(y^2-\sqrt{2}y)=0$. Примечательно, что на данном эллипсе расположены два состояния равновесия: $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ – седлоузел, $(\approx 0,21;\approx 3.52)$ – простой узел.

Контактные кривые могут служить в качестве изолированных периодических решений динамических систем на плоскости. Так, например, кривые контактов траекторий системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + x\prod_{i=1}^{n}(x^2+y^2-R_i^2), \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y\prod_{i=1}^{n}(x^2+y^2-R_i^2), \end{cases} \tag{27}$$

где $0 < R_i < R_j$, если $i < j$, с окружностями топографической системы (6) являются предельными циклами.

Все окружности топографической системы (6) на фазовой плоскости, за исключением окружностей $L_i: x^2+y^2-R_i^2=0, i=\overline{1,n}$, являются циклами без контактов [4]. Поэтому отмеченные окружности, и только они, являются предельными циклами системы (27).

Примечания

1. Захаров В. П. Нейтральные многообразия и условия существования конечного или счетного множества предельных циклов // Материалы Всесоюзной конференции по качественной теории дифференциальных уравнений. Рязань, 1971. С. 140–141.

2. Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск : Наука и техника, 1979. 744 с.

3. Атаманов П. С. О достаточных условиях существования предельных циклов одной системы дифференциальных уравнений // Волжский математический сборник. 1973. Вып. 16. С. 11–15.

4. Качественная теория динамических систем второго порядка / А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. Москва : Наука, 1966. 568 с.

References

1. Zakharov V. P. Neutral manifolds and conditions of existence of finite or countable set of limit cycles // Materials of the All-Union Conference on Qualitative Theory of Differential Equations. Ryazan, 1971. P. 140–141.

2. Erugin N. P. Book for reading on general course of differential equations. Minsk : Science and Technology, 1979. 744 p.

3. Atamanov P. S. On sufficient conditions for existence of limit cycles of a system of differential equations // Volga Mathematical Collection. 1973. Iss. 16. P. 11–15.

4. Qualitative theory of second-order dynamical systems / A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon and A. G. Maier. New York : John Wiley and Sons, 1973. 568 p.

Статья поступила в редакцию 20.06.2024; одобрена после рецензирования 01.07.2024; принята к публикации 02.07.2024.

The article was submitted 20.06.2024; approved after reviewing 01.07.2024; accepted for publication 02.07.2024.