УДК 515.14
ББК 22.152.21
К 59

В.А. Козлов

Коэффициенты Дынкина когомологических операций Адамса*

(Рецензирована)

Аннотация

В статье изучаются топологические характеристики когомологических операций Адамса. Для виртуальных представлений Адамса найдены коэффициенты Дынкина.

Ключевые слова: *коэффициенты Дынкина, когомологические операции Адамса, полиномы Ньютона, компактные группы Ли.*

V.A. Kozlov

Dynkin's coefficients of the Adams cohomological operations

Abstract

In the paper, topological characteristics of the Adams cohomological operations are studied. Dynkin's coefficients have been found for the virtual Adams notions.

Key words: *Dynkin's coefficients, the Adams cohomological operations, Newton polynoms, Li compact groups.*

Нашей целью является получение дополнительной когомологической информации об операциях Адамса. А именно, найти формулу для вычисления коэффициентов Дынкина операций Адамса.

Вначале приведем необходимые сведения. Подробности можно найти в [1 - 3].

Коэффициенты Дынкина

Каждому образующему элементу X алгебры когомологий $H^*(U(N))$ унитарной группы *Ли* $U(N)$ соответствует определенный симметрический многочлен $R(X)$ от переменных $T_1, T_2, ..., T_N$ ($T_1, T_2, ..., T_n$ - координаты картановской подалгебры группы *Ли* $U(N)$), инвариантный относительно группы Вейля группы $U(N)$. Пусть Φ – вложение группы *Ли* $U(n)$ в группу $U(N)$, $t_1, t_2, ..., t_n$ - координаты картановской подалгебры группы $U(n)$. Тогда Φ задает выражение весов T_i представления Φ, $i = 1,2,...,N$ в виде линейных функций от t_j, $j = 1,2,...,n$:

$$T_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} t_j , \qquad (1)$$

т.к. максимальный тор группы $U(n)$ вкладывается в максимальный тор группы $U(N)$.

Каждому образующему элементу X алгебры когомологий $H^*(U(N))$ соответствует определенный симметрический многочлен $R(X)$ от переменных $T_1, T_2, ..., T_N$, инвариантный относительно группы Вейля группы $U(N)$. Через $\Phi^* R(X)$ обозначим полином от переменных $t_1, t_2, ..., t_n$, полученный из $R(X)$, подстановкой (1), инвариантный отно-

*Публикуется при поддержке РФФИ и администрации Краснодарского края. Проект N 09-01-96512 р_юг_а

сительно группы Вейля $U(n)$.

Пусть $G = SU(N)$ - группа движений, $H = SU(n)$ - стационарная подгруппа однородного пространства G/H. В этом случае $\sum_i T_j = 0$, $\sum_j t_j = 0$. И пусть S_H - алгебра симметрических полиномов от переменных $t_1, t_2, ..., t_n$. Обозначим через $C = S_H \otimes H^*(G)$ и введем градуировку, положив

$$D(\rho \otimes X) = 2\dim \rho + \dim X \ , \tag{2}$$

$\dim \rho$ - степень однородного многочлена $\rho \in S_H$, $\dim X$ - размерность однородного класса когомологий X алгебры вещественных когомологий группы *Ли* G. Действие дифференциала d определим условиями

$$d(\rho \otimes 1) = 0 \ , \ d(1 \otimes X) = \Phi^* R(X) \otimes 1 . \tag{3}$$

C - дифференциальная, градуированная алгебра, называемая алгеброй Картана.

Теорема (А. Картан). Алгебра когомологий $H^*(G/H)$ однородного пространства G/H компактных групп *Ли* G и H изоморфна алгебре когомологий алгебры C.

Алгебра $H^*(SU(N))$ является внешней алгеброй от образующих $X_3, X_5, ..., X_{2N-1}$.

При этом

$$R(X_{2S-1}) = \sum_{i=1}^{N} T_i^S \ . \tag{4}$$

В алгебре S_H в качестве образующих возьмем полиномы Ньютона $\rho_2, \rho_3, ..., \rho_n$. Через I_K обозначим идеал, натянутый на $\rho_2, \rho_3, ..., \rho_K$, а через χ - произвольное вложение группы H в группу G. Тогда

$$d(1 \otimes X_{2S-1}) = \chi^* R(X_{2S-1}) \otimes 1, \ S = 2,3,...,n .$$

Разложим симметрический многочлен $\chi^* R(X_{2S-1}) \otimes 1$ степени S по образующим $\rho_2, \rho_3, ..., \rho_n$, получим

$$\chi^* R(X_{2S-1}) \otimes 1 \equiv C_S(\chi)\rho_S \mathrm{mod}\, I_{S-1}, \ S = 2,3,...,n . \tag{5}$$

Коэффициенты $C_S(\chi)$, $S = 2,3,...,n$ называют коэффициентами Дынкина.

Операции Адамса

Интерес к когомологическим операциям Адамса связан с тем, что, по существу, эти операции исчерпывают все многообразие когомологических операций в комплексной *K*-теории. Они обладают рядом замечательных свойств и, как кольцевые гомоморфизмы, применяются не только в кольце Гротендика $K(X)$ клеточного комплекса X, но и весьма эффективны в кольце RG представлений группы *Ли* G.

Пусть $G = SU(N)$. Образующими элементами в кольце $RSU(N)$ являются внешние степени $\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_N$ группы $SU(N)$. Степенные суммы $\sum_{i=1}^{r} x_i^K$ от формальных переменных $x_1, x_2, ..., x_r$ (полиномы Ньютона) выражаются через элементарные симметрические функции $b_1^r, b_2^r, ..., b_r^r$ от переменных $x_1, x_2, ..., x_r$ с помощью полинома $Q_r^K(b_1^r, b_2^r, ..., b_r^r)$.

Положим,

$$\psi_\kappa^r = Q_r^\kappa(\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_r);$$

здесь под суммой и произведением понимается прямая сумма и тензорное произведение представлений, ψ_κ^r - виртуальное представление группы $SU(N)$, называемое операцией Адамса

$$\psi_\kappa(u_1 + u_2) = \psi_\kappa(u_1) + \psi_\kappa(u_2),$$
$$\psi_\kappa(u_1 \otimes u_2) = \psi_\kappa(u_1) \cdot \psi_\kappa(u_2),$$
$$\psi_\kappa(\psi_e(u)) = \psi_{\kappa e}(u).$$

Теорема. $C_S(\psi_i) = i^S$ **.**

Доказательство. Сгруппируем в ψ_i слагаемые с одинаковыми знаками. Тогда виртуальное представление ψ_i можно записать в виде

$$\psi_i = A - B,$$

где A и B уже обычные, невиртуальные представления. Следовательно, мы можем говорить о коэффициентах Дынкина $C_S(A)$ и $C_S(B)$ представлений A и B. Под коэффициентом $C_S(\psi_i)$ будем понимать разность

$$C_S(\psi_i) = C_S(A) - C_S(B).$$

Ниже будет показано, что такое определение имеет смысл.

Покажем сначала, что для $u \in SU(N)$

$$X_{\psi_i}(u) = S_\rho u^i,$$

где X - характер, S_ρ - след. Матрицу u можно считать диагональной, поскольку существует базис (из собственных векторов u), в котором она имеет диагональный вид. Пусть ее собственными векторами являются векторы $e_1, e_2, ..., e_N$, а соответствующими собственными значениями - $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$.

Пространство представления Λ_m, $m = 1,2,...,N$ (Λ_m - максимальная внешняя степень группы $SU(N)$) имеет базисные векторы

$$e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge ... \wedge e_{j_m}, \quad 1 \le j_1 < j_2 < ... < j_m \le N,$$

$\wedge$ - внешнее умножение. Тогда веса представления Λ_m имеют вид $\lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}, ..., \lambda_{j_m}$, а характером Λ_m будет максимальная симметрическая функция b_m переменных $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$:

$$X_{\Lambda_m}(u) = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < ... < j_m \le N} \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} ... \lambda_{j_m} = b_m(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N).$$

Учитывая определение операций Ψ_i и свойства характеров, получаем

$$X_{\psi_i}(u) = Q_i(b_1(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N), ..., b_N(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N)) = \lambda_1^i + \lambda_2^i + ... + \lambda_N^i = S_p(u^i). \qquad (6)$$

Перейдем к алгебре *Ли* $su(N)$ группы $SU(N)$. Для этого воспользуемся разложением матрицы u в ряд Тейлора в окрестности единицы группы $SU(N)$: $u = E + \Delta + ...$, где Δ - уже элемент алгебры $su(N)$. При этом

$$\lambda_1 = 1 + t_1 + \ldots,\ \lambda_2 = 1 + t_2 + \ldots,\ \ldots,\ \lambda_N = 1 + t_N + \ldots, \tag{7}$$

$t_1, t_2, \ldots, t_N$ - координаты картановской подалгебры группы $SU(N)$. Следовательно,

$$\lambda_1^i = 1 + it_1 + \ldots,\ \lambda_2^i = 1 + it_2 + \ldots,\ \ldots,\ \lambda_N = 1 + t_N + \ldots, \tag{8}$$

т.е. матрице u^i в алгебре $su(N)$ соответствует матрица $i\Delta$.

Пусть $\psi_i = A - B$. И пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{N_1}$ - веса представления A, $N_1 = \dim A$; $в_1, в_2, \ldots, в_{N_2}$ - веса представления B, $N_2 = \dim B$ (a_i и $в_i$ - некоторые линейные комбинации элементов $t_1, t_2, \ldots, t_N$).

Рассмотрим разность $s - x$ полиномов Ньютона от переменных $a_1, a_2, \ldots, a_{N_1}$ и $в_1, в_2, \ldots, в_{N_2}$:

$$R_S(a_1, a_2, \ldots, a_{N_1}) - R_S(в_1, в_2, \ldots, в_{N_2}).$$

Принимая во внимание (6), (7), (8) и степень виртуального представления, равную N, получаем

$$R_S = (a_1, a_2, \ldots, a_{N_1}) - R_S = (в_1, в_2, \ldots, в_{N_2}) = (it_1)^S + (it_2)^S + \ldots + (it_N)^S = i^S \rho_S(t_1, t_2, \ldots, t_N).$$

Последнее равенство истолкуем в терминах коэффициентов Дынкина:

$$C_S(A) - C_S(B) = C_S(\psi_i) = i^S.$$

Теорема доказана.

Примечания:

1. Адамс Дж. Лекции по группам Ли. М., 1979. 144 с.
2. Атья М. Лекции по К-теории. М., 1967. 260 с.
3. Дынкин Е.Б. Топологические характеристики гомоморфизмов компактных групп // Математический сборник. М., 1954. Т. 35, № 1. С. 129-173.
4. Каруби М. К-теория. Введение. М., 1981.

References:

1. Adams J. Lectures on Li groups. M., 1979. 144 pp.
2. Atiya M. Lectures on the K-theory. M., 1967. 260 pp.
3. Dynkin E.B. Topological characteristics of compact groups homomorphisms // Mathematical collection. M., 1954. V.35. No. 1. P. 129-173.
4. Karubi M. The K- theory. Introduction. M., 1981.