УДК 517.9
ББК 22.161.6
К 59

Козлов В.А.
Кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой математического анализа математического факультета Армавирской государственной педагогической академии, e-mail: shagin196@yandex.ru
Кумшаев Е.Н.
Преподаватель кафедры математического анализа математического факультета Армавирской государственной педагогической академии, тел. (8613) 74-76-49
Паланджянц Л.Ж.
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и системного анализа Майкопского государственного технологического университета, тел. (8772) 57-03-53, e-mail: levonmgtu@rambler.ru

Об одной вариационной задаче теории мультипликативного интеграла

(Рецензирована)

Аннотация
Рассматривается решение одной вариационной задачи теории мультипликативного интеграла.
Ключевые слова: *криволинейный мультипликативный интеграл, вариация.*

Kozlov V.A.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Mathematical Analysis Department of Mathematical Faculty, Armavir State Pedagogical Academy, e-mail: shagin196@ yandex.ru
Kumshaev E.N.
Lecturer of Mathematical Analysis Department of Mathematical Faculty, Armavir State Pedagogical Academy, ph. (8613) 74-76-49
Palandzhyants L.Zh.
Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Higher Mathematics and System Analysis Department of Maikop State University of Technology, ph. (8772) 57-03-53, e-mail: levonmgtu@rambler.ru

On a variation task of the theory of the multiplicative integral

Abstract
This paper considers the solution of a variation problem of the theory of the multiplicative integral.
Keywords: *curvilinear multiplicative integral, variation.*

Впервые задачу о вариации криволинейного мультипликативного интеграла сформулировал О.В. Мантуров [1]. При этом более подробно была рассмотрена задача о кривизне криволинейного мультипликативного интеграла. В предположении о том, что кривизна зависит от некоторой функции одной переменной, предлагалось найти условия на эту функцию, при которых кривизна становилась нулевой. В случае квадратных матриц второго порядка формулировалась вариационная задача на минимум скалярного функционала.

Рассмотрим криволинейный мультипликативный интеграл вдоль кривой γ в области $D \subset R^2$ с параметризацией $x = x(t),\ y = y(t)$ [1]:

$$\overset{\cup}{\int_{\gamma}} E + P(x,y,u)dx + Q(x,y,u)dy\ , \tag{1}$$

где $P(x,y,u)$ и $Q(x,y,u)$ – непрерывно дифференцируемые $n \times n$-матричные функции от трех переменных, а $u = u(x,y)$ – неизвестная скалярная функция от двух переменных x и y.

$K(P,Q) = Q_x + Q_u u_x - P_y - P_u u_y + PQ - QP$ – кривизна интеграла (1).

Кривизна K криволинейного мультипликативного интеграла представляет собой матричную функцию переменных x, y и u.

Сформулируем две задачи, связанные с нулевой кривизной криволинейного мультипликативного интеграла (1).

1. Найти функцию $u(x,y)$, для которой кривизна интеграла (1) будет нулевой матрицей. При этом условие $K=0$ является дифференциальным уравнением в частных производных с матричными коэффициентами относительно неизвестной функции $u(x,y)$.

2. Предположим, что $P(x,y,u)=(p_{ij})$ и $Q(x,y,u)=(q_{ij})$ – непрерывно дифференцируемые 2×2-матричные функции от трех переменных x, y и u. Тогда $K=(k_{ij})$, где $k_{ij} = q_{ijx} + q_{iju}u_x - p_{ijy} - p_{iju}u_y + p_{is}q_{sj} - q_{is}p_{sj}$.

Условие $SpK=0$ имеет вид

$$Sp\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 .$$

Исключая случай, когда матрица K представляет собой каноническую жорданову форму, можно вместо условия $K=0$ рассмотреть условие

$$\int_D SpKK^* ds = 0 , \tag{2}$$

где Sp означает след, D – область, содержащая начальную точку x_0, y_0; ds – элемент площади.

Займемся решением второй задачи.

Вычисление функции $u(x,y)$, удовлетворяющей условию (2), сводится к решению вариационной задачи на минимум скалярного функционала:

$$G(u) = \int_D SpKK^* ds , \tag{3}$$

где

$$SpKK^* = \sum_{i,j=1}^{2} k_{ij}^2 .$$

Исследование на экстремум функционала (3) описано, например, в работе [2, с. 312].

Введем обозначения:

$$p = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad SpKK^* = L(t,x,y,p,q), \quad L_p = \frac{\partial L}{\partial p}, \quad L_q = \frac{\partial L}{\partial q} .$$

Тогда функция $u(x,y)$ является решением уравнения Эйлера

$$L_u - \frac{\partial}{\partial x}L_p - \frac{\partial}{\partial y}L_q = 0 . \tag{4}$$

Легко увидеть, что полученное уравнение (4) зависит от структуры матрицы K. Нам потребуются несколько утверждений, приводящих матрицу K к удобному виду для применения вариационной задачи. Одним из таких удобных видов является принадлежность матрицы K алгебре $n\times n$-квадратных матричных функций со следом нуль, то есть $sl(nR)$.

Лемма 1. Пусть $\widetilde{P}=CPC^{-1}\pm C_xC^{-1}$, $\widetilde{Q}=CQC^{-1}\pm C_yC^{-1}$ – калибровочные преобразования матричных функций P и Q, где $C=C(x,y)$ – некоторая невырожденная гладкая матричная функция. Пусть, далее, $K=Q_x-P_y\pm[Q,P]$. Тогда $\widetilde{K}=CKC^{-1}$.

Утверждение леммы легко проверяется, причем, знак «+» нужно брать в случае интеграла $\overset{\frown}{\int}$, а знак «–» – в случае интеграла $\overset{\smile}{\int}$.

Лемма 2. Пусть $P(x,y)\in sl(n,R)$, $Q(x,y)\in sl(n,R)$. Тогда $K(P,Q)\in sl(n,R)$.

Доказательство. Имеем $K(P,Q)=Q_x-P_y-[Q,P]$, откуда следует, что $SpK(P,Q)=Sp(Q_x)-Sp(P_y)--Sp([Q,P])$. Учитывая, что $Sp(Q_x)=(SpQ)_x=0$, $Sp(P_y)=(SpP)_y=0$, $Sp([Q,P])=0$, получаем $SpK(P,Q)=0$, то есть $K(P,Q)\in sl(n,R)$.

Однако, если $K(P,Q)\notin sl(2,R)$, то можно подобрать такое калибровочное преобразование неособой матричной функцией $C(x,y)$, что при некоторых ограничениях преобразованная матрица $\widetilde{K}=CKC^{-1}$ будет принадлежать алгебре 2×2-квадратных матричных функций со следом нуль.

Лемма 3. Пусть $n=2$,

$$\widetilde{P}=CPC^{-1}-C_xC^{-1}\in sl(2,R),\quad \widetilde{Q}=CQC^{-1}-C_yC^{-1}\in sl(2,R), \tag{5}$$

где $(SpP)_y=(SpQ)_x$ и $\det C=\int(SpPdx+SpQdy)$. Тогда $\widetilde{K}(\widetilde{P},\widetilde{Q})\in sl(2,R)$.

Доказательство. Принадлежность $\widetilde{K}(\widetilde{P},\widetilde{Q})\in sl(2,R)$ следует из леммы 2. Остается предъявить матричную функцию $C(x,y)$. Из условий (5) имеем:

$$Sp\widetilde{P}=Sp(CPC^{-1})-Sp(C_xC^{-1})=0,\quad Sp\widetilde{Q}=SP(CQC^{-1})-Sp(C_yC^{-1})=0,$$

Так как $Sp(CPC^{-1})=SpP$ и $Sp(CQC^{-1})=SpQ$, то получаем

$$SpP=Sp(C_xC^{-1}),\quad SpQ=Sp(C_yC^{-1}). \tag{6}$$

При $C=(c_{ij})$, $i,\ j=1,2$ уравнения (6) равносильны системе уравнений

$$\begin{cases} p_{11}+p_{22}=c_{11x}c_{22}-c_{12x}c_{21}-c_{21x}c_{12}+c_{22x}c_{11}, \\ q_{11}+q_{22}=c_{11y}c_{22}-c_{12y}c_{21}-c_{21y}c_{12}+c_{22y}c_{11}, \end{cases}$$

или $\dfrac{\partial}{\partial x}DetC=SpP$, $\dfrac{\partial}{\partial y}DetC=SpQ$. Условие интегрируемости: $\dfrac{\partial}{\partial y}SpP=\dfrac{\partial}{\partial x}SpQ$. При этом (см., например, [3, с. 59]) имеет место равенство $\det C=\int(SpPdx+SpQdy)$. Таким образом, матричная функция $C(x,y)$ вычислена в явном виде.

Покажем, что преобразованием подобия произвольную матричную функцию $K\in sl(2,R)$ можно свести к матричной функции $\widetilde{K}\in sl(2,R)$, являющейся линейной относительно переменных u, p и q.

Теорема 1. Пусть $K=\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & -k_{11} \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$, $\widetilde{K}=\begin{pmatrix} u & p \\ q & -u \end{pmatrix}$. Пусть $CK=\widetilde{K}C$. Тогда $C=\begin{pmatrix} \dfrac{-c_{12}k_{21}+c_{21}p}{k_{11}-u} & c_{12} \\ c_{21} & \dfrac{-c_{12}q+c_{21}k_{12}}{k_{11}-u} \end{pmatrix}$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{cases} c_{11}k_{11}+c_{12}k_{21}=c_{11}u+c_{21}p, \\ c_{11}k_{12}-c_{12}k_{11}=c_{12}u+c_{22}p, \\ c_{21}k_{11}+c_{22}k_{21}=c_{11}q-c_{21}u, \\ c_{21}k_{12}-c_{21}k_{11}=c_{12}q-c_{22}u. \end{cases} \tag{7}$$

Из системы (7) получаем:

$$\begin{cases} c_{11}=\dfrac{-c_{12}k_{21}+c_{21}p}{k_{11}-u}, \\ c_{22}=\dfrac{-c_{12}q+c_{21}k_{12}}{k_{11}-u}, \\ c_{12}(k_{11}+u+\dfrac{k_{12}k_{21}}{k_{11}-u}-\dfrac{pq}{k_{11}-u})=0, \\ c_{21}(k_{11}+u+\dfrac{k_{12}k_{21}}{k_{11}-u}-\dfrac{pq}{k_{11}-u})=0. \end{cases} \tag{8}$$

Так как

$$k_{11}+u+\frac{k_{12}k_{21}}{k_{11}-u}-\frac{pq}{k_{11}-u}=\frac{k_{11}^2+k_{12}k_{21}-u^2-pq}{k_{11}-u},$$

то, учитывая, что $DetK=-k_{11}^2-k_{12}k_{21}$ и $Det\widetilde{K}=-u^2-pq$, получаем:

$$k_{11}+u+\frac{k_{12}k_{21}}{k_{11}-u}-\frac{pq}{k_{11}-u}=\frac{Det\widetilde{K}-DetK}{k_{11}-u}.$$

Кроме того, из равенства $CK=\widetilde{K}C$ следует, что $DetK=Det\widetilde{K}$. Следовательно, $k_{11}+u+\dfrac{k_{12}k_{21}}{k_{11}-u}-\dfrac{pq}{k_{11}-u}=0$, то есть c_{12} и c_{21} являются свободными переменными системы (8). Таким образом,

$$C=\begin{pmatrix} \dfrac{-c_{12}k_{21}+c_{21}p}{k_{11}-u} & c_{12} \\ c_{21} & \dfrac{-c_{12}q+c_{21}k_{12}}{k_{11}-u} \end{pmatrix}.$$

Теорема 1 доказана.

Следствие. Имеем $SpKK^*=2u^2+p^2+q^2$. Уравнение Эйлера (4) примет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2u, \tag{9}$$

где начальная точка $x_0, y_0 \in D$. Отметим, что помимо начальных условий можно сформулировать граничные условия на области D. Уравнение (9) представляет собой известное уравнение Пуассона (или Гельмгольца) (см., например, [4, с. 375]).

Таким образом, подбирая матрицу $\tilde{K}$ соответствующим образом, можно получать дифференциальные уравнения в частных производных.

Покажем, что если K является линейной матричной функцией от переменных u, p и q, то уравнение Остроградского представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка.

Пусть $K = A(x,y)u + B(x,y)p + C(x,y)q$, где $A(x,y) = (a_{ij})$, $B(x,y) = (b_{ij})$, $C(x,y) = (c_{ij})$ – дифференцируемые 2×2 - матричные функции.

Введем обозначения:

$a = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$,

$b = (b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22})$,

$c = (c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22})$.

Тогда

$$F = SpKK^* = u^2a^2 + p^2b^2 + q^2c^2 + 2up(a,b) + 2uq(a,c) + 2pq(b,c),$$

где (a,b) – скалярное произведение векторов a и b.

Вычислим частные производные по переменным u, p и q.

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 2(ua + pb + qc)a, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = 2(ua + pb + qc)b, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = 2(ua + pb + qc)c.$$

Подставляя вычисленные значения частных производных в уравнение (4), получаем линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка:

$$b^2u_{xx} + 2(b,c)u_{xy} + c^2u_{yy} = (a^2 - (a,b)_x - (a,c)_y)u - ((b^2)_x + (b,c)_y)u_x - (b,c)_x + (c^2)_y)u_y.$$

Перейдем к исследованию второй вариации.

Для функционала

$$S = \int_D L\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u\right)dxdy$$

формула второй вариации имеет вид:

$$\delta^2 S = \frac{1}{2}\int_D dxdy\left\{\left[\frac{\partial^2 L}{\partial u^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial u \partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial u \partial u_y}\right)\right](\delta u)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 L}{(\partial u_x)^2}(\delta u_x)^2 + \frac{\partial^2 L}{(\partial u_y)^2}(\delta u_y)^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial u_x \partial u_y}\delta u_x \delta u_y\right\}. \quad (10)$$

В нашем случае имеем функционал

$$L = \left(ua + \frac{\partial u}{\partial x}b + \frac{\partial u}{\partial y}c\right)^2.$$

Вычислим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}=2a^2\,,\qquad \frac{\partial^2 L}{(\partial u_x)^2}=2b^2\,,\qquad \frac{\partial^2 L}{(\partial u_y)^2}=2c^2\,,\qquad \frac{\partial^2 L}{\partial u_x \partial u_y}=2ab\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial u \partial u_x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(2ab)=0\,,\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial u \partial u_y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(2ac)=0\,.$$

Тогда вторая вариация (10) примет вид

$$\delta^2 S=\int_D \left\{a^2(\delta u)^2+b^2(\delta u)^2+c^2(\delta u)^2+ac(\delta u_x \delta u_y)\right\}dxdy\,.$$

Таким образом, решена вариационная задача в случае, когда кривизна криволинейного мультипликативного интеграла является линейной функцией относительно переменных u, p и q.

Замечание 1. Отметим, что случаю $K=A(x,y)u+B(x,y)p+C(x,y)q$ соответствует следующий выбор подынтегральных матричных функций, при котором одна из подынтегральных функций линейно зависит от u, $P(x,y,u)=B_1(x,y)u$, $Q(x,y,u)=C_1(x,y)$, где $A=-B_y+[B_1,C_1]$, $B=0$, $C=-B_1$, $C_{1x}=0$.

Это обстоятельство позволяет сформулировать ряд задач, связанный с линейной зависимостью подынтегральных матричных функций от переменной u.

1. Одна из подынтегральных функций P и Q линейно зависит от переменной u.

Пусть $P(x,y,u)=B(x,y)u$, $Q(x,y,u)=C(x,y)$, где $B(x,y)$ и $C(x,y)$ – достаточно гладкие матричные функции второго порядка.

Тогда

$$K=\left(-B_y+[B,C]\right)u-Bp+C_x\,.$$

Следовательно,

$$KK^*=\left(-B_y+[B,C]\right)\left(-B_y^*+[B,C]^*\right)u^2+\left(\left(-B_y+[B,C]\right)C_x^*+\left(-B_y+[B,C]\right)C_x^*\right)u+$$
$$+\left(\left(-B_y+[B,C]\right)B^*+B^*\left(-B_y+[B,C]\right)\right)uq-\left(BC^*+CB^*\right)q+C_xC_x^*\,.$$

Вычислим $L=SpKK^*$.

Введем обозначения:

$A_1=sp\left(-B_y+[B,C]\right)\left(-B_y^*+[B,C]^*\right)$,

$A_2=sp\left(\left(-B_y+[B,C]\right)C_x^*+\left(-B_y+[B,C]\right)C_x^*\right)$,

$A_3=sp\left(\left(-B_y+[B,C]\right)B^*+B^*\left(-B_y+[B,C]\right)\right)$,

$A_4=sp\left(BB^*\right)$,

$A_5=-sp\left(BC^*+CB^*\right)$,

$A_6=C_xC_x^*$.

Тогда

$$L=A_1u^2+A_2u+A_3uq+A_4q^2+A_5q+A_6\,.$$

Имеем

$$L_u=2A_1u+A_2+A_3q\,,\qquad L_p=0\,,\qquad L_q=A_3u+2A_4q+A_5\,.$$

Следовательно, уравнение (4) запишется в виде

$$2A_1u + A_2 + A_3q - A_{3y}u - A_3q - 2A_{4y}q - 2A_4u_{xy} - A_{5y} = 0 ,$$

откуда получаем линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка:

$$2A_4u_{xy} + 2A_{4y}u_y - (2A_1 - A_{3y})u + A_{5y} - A_2 = 0 .$$

2. Обе подынтегральные функции P и Q линейно зависят от переменной u.

Пусть $P(x,y,u) = B(x,y)u$, $Q(x,y,u) = C(x,y)u$, где $B(x,y)$ и $C(x,y)$ – достаточно гладкие матричные функции второго порядка.

Вычислим кривизну интеграла (1):

$$K = u^2[B,C] + u(B_x - C_y) + Bp - Cq .$$

Тогда

$$KK^* = u^4([B,C][B,C]^*) + u^3([B,C](B_x - C_y)^* + (B_x - C_y)[B,C]^*) +$$

$$+ u^2(B_x - C_y)(B_x - C_y)^* + u^2p([B,C]Bu^* + Bu[B,C]^*) - u^2q([B,C]Cu^* + Cu[C,B]^*) +$$

$$+ up((B_x - C_y)B^* + B(B_x - C_y)^*) - uq((B_x - C_y)C^* + C(B_x - C_y)^*) +$$

$$+ p^2BB^* - q^2CC^* - pq(BC^* + CB^*) .$$

Вычислим $L = SpKK^*$.

Введем обозначения:

$A_1 = u^4 sp([B,C][B,C]^*)$,

$A_2 = u^3 sp([B,C](B_x - C_y)^* + (B_x - C_y)[B,C]^*)$,

$A_3 = u^2 sp(B_x - C_y)(B_x - C_y)^*$,

$A_4 = u^2 psp([B,C]Bu^* + Bu[B,C]^*)$,

$A_5 = -u^2 qsp([B,C]Cu^* + Cu[C,B]^*)$,

$A_6 = upsp((B_x - C_y)B^*$,

$A_7 = -uqsp((B_x - C_y)C^* + C(B_x - C_y)^*)$,

$A_8 = p^2 sp(BB^*)$,

$A_9 = -q^2 sp(CC^*)$,

$A_{10} = -pqsp(BC^* + CB^*)$.

Тогда

$$L = A_1u^4 + A_2u^3 + A_3u^2 + A_4u^2p + A_5u^2q + A_6up + A_7uq + A_8p^2 + A_9q^2 + A_{10}pq .$$

Имеем:

$L_u = 4A_1u^3 + 3A_2u^2 + 2A_3u + 2A_4up + 2A_5uq + A_6p + A_7q$,

$L_p = A_4u^2 + A_6u + 2A_8p + A_{10}q$,

$L_q = A_5u^2 + A_7u + 2A_9p + A_{10}p$,

$\dfrac{\partial}{\partial x}L_p = A_{4x}u^2 + 2A_4up + A_{6x}u + A_6p + 2A_8u_{xx} + 2A_{8x}p + A_{10x}q + A_{10}u_{xy}$,

$$\frac{\partial}{\partial x}L_q = A_{5y}u^2 + 2A_5uq + A_{7y}u + A_7q + 2A_{9y}q + 2A_9u_{yy} + A_{10y}p + A_{10}u_{xy}.$$

Следовательно, уравнение (4) запишется в виде нелинейного дифференциального уравнения в частных производных:

$$2A_8u_{xx} + 2A_{10}u_{xy} + 2A_9u_{yy} + (2A_{8x} + A_{10y} - 2A_6)u_x + (2A_{9y} + A_{10x} - 2A_7)u_y +$$

$$+ (2A_{6x} + A_{7y} - 2A_3)u + (A_{4x} + A_{5y} - 3A_2)u^2 - 4A_1u^3.$$

В заключение статьи авторы надеются, что теория мультипликативного интеграла и связанные с ней вариационные задачи получат дальнейшее развитие.

Примечания:

1. Мантуров О.В. Мультипликативный интеграл // Проблемы геометрии. 1990. Т. 22. С. 167-215.
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука. 1965. 424 с.
3. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М., 1960. 260 с.
4. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: точные решения. М.: Международная программа образования, 1996. 496 с.

References:

1. Manturov O.V. Multiplicate integral // Geometry problems. 1990. Vol. 22. P. 167-215.
2. Elsgolts L.E. Differential equations and calculus of variations. M.: Nauka. 1965. 424 p.
3. Kamke E. The directory of the first-order partial differential equations. M., 1960. 260 p.
4. Zaytsev V.F., Polyanin A.D. The directory of the partial differential equations: exact decisions. M.: International education program, 1996. 496 p.